

überhaupt nicht gebe, so bezog sich natürlich diese Feststellung nur auf die Ebene. Im Raume gibt es nichtscheidende Geraden in größter Anzahl, nämlich sowohl die Zwillingsgeraden als die windschiefen Geraden. Man kann geradezu einen grundsätzlichen Gegensatz zwischen Raumgeraden und Ebenengeraden konstatieren, indem man das Gesetz beachtet: Raumgeraden schneiden sich niemals, Ebenengeraden schneiden sich immer. Dieser schöne Gegensatz konnte in der euklidischen Geometrie noch nicht bemerkt werden, da die euklidische Geometrie irrtümlicherweise auch in der Ebene nichtscheidende Geraden annimmt. Demgegenüber setzt die Polar-geometrie den klaren Gegensatz zwischen Planimetrie und Stereo-metrie. Nichtscheidende Geraden sind nach ihr nur in der Stereo-metrie möglich.

§ 77. Die Schnittlinie zweier Ebenen.

Wenn zwei Geraden sich niemals schneiden, so sind es Raumgeraden, d. h. ihr gegenseitiges Verhältnis ist nur durch drei Dimensionen ausdrückbar. Wenn zwei Geraden sich aber schneiden, so sind es Ebenengeraden, d. h. ihr gegenseitiges Verhältnis ist durch zwei Dimensionen ausdrückbar. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist also gleichsam der Ersatz für eine Dimension. Dieses interessante Gesetz ist wieder nur auf Grund der objektiven Geometrie möglich, während die euklidische Geometrie in dieser Hinsicht vollkommen chaotisch erscheint.

Da Gerade, Ebene und Raum in der Polar-geometrie eine Trias bilden, die sich durchaus analog verhält, läßt sich von den Schnitt-verhältnissen zweier Geraden auch auf die Schnittverhältnisse zweier Ebenen ein Schluß ziehen. Zwei Ebenen desselben Raumes schneiden sich stets in einer Totalgeraden, die in Analogie zu den beiden Geraden-schnittpunkten bekanntlich aus zwei logisch selbständigen Hälften besteht. Zwei Ebenen dagegen, die nicht demselben Raum angehören, schneiden sich nach Analogie der Raumgeraden überhaupt nicht.

§ 78. Die Mehrzahl der Räume.

Da es nach § 73 einen bewegten Raum gibt, gibt es auch mehrere Räume. Denn wie jede sich bewegende Ebene mehrere Ebenen erzeugt, so erzeugt ein sich bewegendes Raum mehrere Räume. Es

gibt also beliebig viele Räume, wie es beliebig viele Ebenen, Geraden und Punkte gibt. Jeder Punkt P , den man annimmt, bestimmt ja nach § 73 einen Raum.

Da nach § 77 Ebenen verschiedener Räume keine Gerade gemeinsam haben, so haben auch die Räume selbst keine Gerade, geschweige denn eine Ebene, gemeinsam. Zwei Räume schneiden sich also überhaupt niemals. Sie sind gegeneinander völlig transzendent, schließen einander absolut aus. Dies läßt sich natürlich nicht durch die Vorstellung begreifen, sondern durch den logischen Verstand. Ein Hilfsmittel, um den Raum in endlicher Form darzustellen und also auf Wunsch auch mehrere Räume mathematisch abzubilden, wird in einem der folgenden Paragraphen angegeben werden. (§ 81.)

Unter allen Räumen, die man neben einem Raum mit den Polen P und P' sich denken kann, ist einer vor allen andern besonders ausgezeichnet. Es ist der Raum mit den Polen P' und P , d. h. der Konträrraum des ursprünglichen, in welchem die Pole umgekehrt sind. Dieser Konträrraum hat u. a. auch eine interessante algebraische Bedeutung, die nunmehr dargestellt sei.

§ 79. Die Logarithmen negativer Zahlen.

Schon einige Jahrhunderte lang hat man die Frage aufgeworfen, ob es Logarithmen negativer Zahlen gibt. Z. B. enthält derselbe Band des Leipziger Magazins von 1786, der Lamberts berühmte Untersuchung über die Parallelen bietet, auch eine längere Abhandlung über dieses Problem. Nun ist darüber zweierlei ganz klar:

1. Daß der bisher bekannt gewesene Zahlenkosmos kein Hilfsmittel enthält, um die Logarithmen negativer Zahlen auszudrücken. Denn weder positive noch negative, weder reelle noch imaginäre Zahlen noch irgend eine andere bekannte Zahlenart wäre imstande, die Größe x der Gleichung $g^x = -a$ auszudrücken.

2. Daß die Mathematik selbstverständlich Mittel und Wege finden muß, um auf eine so klare, einfache Frage den befriedigenden Aufschluß nicht schuldig bleiben zu müssen.

Die Lösung des alten Problems ist unmöglich, so lange man sich auf dem Standpunkt der Singularität des Raumes befindet. Wenn nur ein einziger Raum logisch denkbar ist, oder wenn nur solche Räume logisch denkbar sind, die miteinander irgend etwas gemein haben,

so ist für Logarithmen negativer Größen kein Rat zu schaffen. Wenn man jedoch auf dem soeben entwickelten Standpunkt der Polar-geometrie steht, daß Raum und Konträrraum möglich sind, die miteinander nicht die leiseste logische Gemeinschaft besitzen, so fällt einem die Lösung betreffs der Logarithmen negativer Größen mühelos zu.

Während der ursprüngliche Raum mit den Polen P und P' die Logarithmen positiver Größen enthält, ist der Konträrraum mit den Polen P' und P der Ort der Logarithmen negativer Größen. Beide Räume sind grundsätzlich gleichberechtigt. Sie stellen gleichsam verschiedene mathematische Zustände dar, die einander ebenso fremd gegenüberstehen wie in der metaphysischen Welt die Zustände Leben und Tod. Raum und Konträrraum sind auf zwei verschiedene Nullpunkte bezogen, im übrigen aber von genau der gleichen Struktur.

§ 80. Die Dimensionenzahl des Raumes.

Die Mathematik in ihrer Ausbildung durch Gauß und Riemann spricht von möglichen Räumen mit mehr als drei Dimensionen. Sie hält den Erfahrungsraum nur für einen einzigen der möglichen Räume und findet in der Annahme mehrdimensionaler Räume keine Schwierigkeit.

Wie sehr auch anzuerkennen ist, daß die Auswertbarkeit dieses Standpunktes in logischer und algebraischer Hinsicht viel Interesse hat, so muß doch betont werden, daß er für die Polargeometrie gar nicht in Betracht kommt. Denn die Polargeometrie ist ausdrücklich als empirisch fundierte Wissenschaft definiert worden. Sie betrachtet die Erfahrungswirklichkeit nicht als Spezialfall der wissenschaftlich möglichen Fälle, sondern vielmehr als die einzig haltbare Grundlage aller Wissenschaft, die sich mit Erfahrungsgrößen abgibt. Nun unterliegt es aber keinem Zweifel, daß eine Wissenschaft, welche von „Dimensionen“ im geometrischen Sinne redet, über Erfahrung spricht, sich also auch an Erfahrung zu halten hat. Entweder ist die Annahme mehrdimensionaler Räume irgendwie berechtigt — dann gehört sie nicht in das Gebiet, welches wir als Geometrie bezeichnen. Oder aber sie behauptet sich ausdrücklich als geometrischen Charakters — dann muß die objektive Geometrie sie als Phantasiegebilde beurteilen.

Für die Polargeometrie, welche auf dreizehn klare Definitionen gegründet ist, ist die Dreidimensionalität des Raumes das eigentliche Wesensmerkmal des Raumes. Es läßt sich beweisen, daß etwa die Definition: „Der Raum ist ein vierdimensionales Ordnungsgebilde“ mit den vorhergehenden Definitionen § 11 im Widerspruch stände. Dieser Beweis geschieht in folgender Weise: Nach Definition II geht der rechte Winkel im Vollwinkel viermal auf. Eine Dimension ist aber durch Definition III auf Grund dieses Gesetzes der Erfahrung definiert. Folglich ist es gar nicht möglich, logischerweise von mehr als dreidimensionalen geometrischen Gebilden zu sprechen.

Für die reine Logik, deren Wert dementsprechend gering ist, mag die Erfahrungswelt immerhin als eine von vielen möglichen Welten gelten. Für die Erfahrungswissenschaft, also auch für die Polargeometrie, ist nicht die bloße Logik, sondern die Erfahrung *suprema lex*. Wo käme eine Erfahrungswissenschaft hin, wenn sie neben den Aussagen der Empirie noch sämtliche Möglichkeiten des formalen Verstandes aufnehmen müßte! Darin besteht gerade die Überlegenheit der Erfahrung über den Verstand, daß der Verstand mit „allem Möglichen“ zufrieden ist, während die Erfahrung aus „allem Möglichen“ nur eine ganz bestimmte Sache als zutreffend und wahr gelten läßt.

§ 81. Die Reversionskugel als mathematisches Modell des Raumes.

Wäre die Kugeloberfläche das einzige Hilfsmittel, um die unendliche Ebene in endlicher Form mathematisch getreu darzustellen, so könnte a priori gesagt werden, daß ein ähnliches Darstellungsmittel für den Raum nicht existiert. Denn die Kugeloberfläche braucht schon eine dreidimensionale Wirklichkeit, welche nicht noch durch eine Dimension vermehrt werden kann.

Nun ist aber die unendliche Ebene ebenso gut durch die Lam-bertsche Münze darstellbar, welche zweidimensional ist. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß für den Raum eine ebenso brauchbare dreidimensionale mathematische Vereindlichung gefunden werden kann.

Diese dreidimensionale Darstellung des dreidimensionalen unendlichen Raumes in endlicher Form ist die Reversionskugel. Sie hat folgende Struktur.

Es sei eine Lambertsche Münze mit Meridianen und Breitenkreisen gegeben. Dann ist jeder Punkt der Ebene auf der Münze durch zwei Koordinaten, nämlich Länge und Breite, eindeutig bestimmt. Man mache nun diese Münze zur Äquatorfläche einer Kugel. Dann ist jeder Punkt des Kugelraumes durch drei Koordinaten, nämlich Länge, Breite und Höhe, eindeutig bestimmt.

Die Lambertsche Münze hat nach § 56 zwei Stellungen A und B. Dementsprechend hat auch diese Kugel zwei Stellungen I und II. Die Umkehrbarkeit der Kugel zwischen den beiden Stellungen ist ihre wichtigste Eigenschaft. Dadurch wird ermöglicht, daß jede der beiden Kugelhälften sowohl über als unter die Äquatorebene zu liegen kommen kann. Die Äquatorfläche verlaufe stets horizontal.

Die Reversionskugel ermöglicht es, die Bewegung eines Punktes durch den unendlichen Raum bis zum Ausgangspunkte zurück zu verfolgen.

Wesentlich ist, daß man nicht annehme, die obere Kugelhälfte gehöre zur Stellung A, die untere Kugelhälfte zur Stellung B der Münze. Sondern man wolle ausdrücklich sein Augenmerk darauf richten, daß jede Kugelhälfte zwei Funktionen ausüben kann, sei es als obere Kugelhälfte der Münzenstellung A (bzw. B) oder als untere Kugelhälfte der Münzenstellung B (bzw. A). Diese Doppelfunktion der beiden Kugelhälften ermöglicht gerade die Darstellung des unendlichen Raumes in endlicher Form.

Damit nicht zu Unrecht die Vermutung entstehe, es handele sich hierbei um komplizierte Dinge, wäre es gut, wenn der geneigte Leser sich in den Besitz einer in der Mitte gespaltenen, aber zusammenschraubbaren Hohlkugel aus Glas setzen könnte. An diesem Modell läßt sich ganz einfach zeigen, was in Worten nur umständlich gesagt werden kann. In dem Modell wird man auch die Koordinaten verschiedener Punkte anschaulich machen können, indem man eine Äquatorebene aus Papier quer durch die Kugel spannt und auf dieser durch Zeichnung Länge und Breite der Punkte angibt, während man die Höhe durch Fäden markieren kann. Jeder Punkt des unendlichen Raumes hat in der Reversionskugel seine exakte Entsprechung, und es wäre wünschenswert, daß man hiervon eine recht konkrete Anschauung gewänne.

§ 82. Die geradlinige Bewegung eines Punktes durch den Raum, ohne Modell angegeben.

Gegeben sei ein Raum mit den Polen P und P' und seiner Äquatorebene. Ein Punkt habe seine Anfangsstellung an einem bestimmten Ort O der Äquatorebene. Er bewege sich von da aus senkrecht zu der Ebene in Richtung des Poles P in den Raum hinaus. Nach einer Entfernung von $\frac{\infty}{2}$ wird er den ersten „merkwürdigen Punkt“ seiner Reise, nämlich den Pol P , passieren. Von diesem aus nähert er sich wieder der Äquatorebene, aber in Richtung auf den Gegenpunkt von O , der O' heiße. Nach der Entfernung ∞ vom Ausgangsort erreicht er diesen Gegenpunkt. Von da ab entfernt er sich wieder von der Ebene, und zwar diesmal gegen den andern Pol P' . Diesen erreicht er nach einem Gesamtwege von $\frac{3}{2}\infty$. Bewegt er sich in derselben Richtung noch um die Strecke $\frac{\infty}{2}$ weiter, so gelangt er an seinen Ausgangspunkt O zurück.

Auf diese Weise hat sich der Punkt geradlinig durch die vier Quadranten des Totalraumes bewegt. Kein Raum ist anders organisiert, als daß er einem Punkt, der sich geradlinig in ihm fortbewegt, diese Rückkehr zum Ausgangspunkt gestattet. Auch der Raum stellt einen „Kreislauf“ dar. (Vgl. § 40.)

§ 83. Dieselbe Bewegung des Punktes im Modell demonstriert.

Gegeben sei eine Reversionskugel in Stellung I. Der Pol P liege oben, und der Punkt beginne seinen Weg in einem Orte O der oberen Münzenfläche. Er bewegt sich bis P auf dem Ast der Ellipse, die durch den Kugelradius und die Breite des Punktes O determiniert ist. Ist der Punkt in P angelangt, so geschieht die erste Reversion des Modells, wodurch es in Stellung II übergeht. Der Punkt bewegt sich vom obersten Pole dieser Stellung, welche jetzt den Namen P trägt, auf einem ebensolchen Ellipsenaste wieder abwärts, und zwar nach derjenigen Richtung, in welcher er den Gegenpunkt von O , namens O' , erreicht. Er bewegt sich von hier noch weiter nach unten bis zum Pol P' . Nun geschieht die zweite Reversion des Modells, durch welche es in Stellung I zurückkehrt. Der unterste Pol behält den Namen P' ,

Von hier aus bewegt sich der Punkt auf dem zugehörigen Ellipsenaste nach oben bis zum Ausgangspunkt 0 zurück.

Die beiden Reversionen des Modells mit zugehörigem Namenswechsel der realen Punkte sind das Hilfsmittel, durch welches die Unendlichkeit des Raumes mathematisch brauchbar dargestellt werden kann.

§ 84. Angabe der drei Raumkoordinaten eines Punktes im Modell.

Es fällt auf, daß im vorhergehenden Paragraphen von einer ellipsenförmigen Bewegung des Punktes die Rede ist, während in Wirklichkeit die Bewegung durch den Raum geradlinig erfolgen soll. Die Einführung der Krümmung ist eine unvermeidliche Folge der endlichen Darstellung. Die Höhe eines Punktes, d. h. seine senkrechte Erhebung über der Äquatorebene, kann im Modell nicht geradlinig dargestellt werden, da Geraden, die auf der Münze senkrecht stehen, in der Regel niemals durch die beiden Pole gehen und außerdem die Wände des Modells durchbrechen würden.

Deshalb sind die Höhenlinien im Modell keine Geraden, sondern Ellipsenäste, welche sich von der Äquatorebene bis zu den Polen erstrecken. Dadurch wird gewährleistet, daß jeder Raumpunkt des unendlichen Raumes innerhalb des Modells eine bestimmte Entsprechung erhält. Wir stellen nun statt weiterer Ausführungen einen Raumpunkt von gegebenen Koordinaten im Modell genau dar.

Es sei zu konstruieren der Raumpunkt von der Länge 30 Grad positiv, der Breite 40 Grad negativ und der Höhe 50 Grad positiv. Man verfährt wie folgt: Längenmeridiane und Breitenkreise bestimmen auf der Lambertschen Münze ohne weiteres den Punkt, über welchem der gesuchte Raumpunkt in Wirklichkeit senkrecht steht. Es handelt sich, da die Breite negativ ist, um Stellung B. Der Punkt auf der Münze determiniert nun mit dem Pol P zusammen einen Ellipsenast, dessen große Achse der Kugelradius ist. Das Höhenniveau von 50 Grad wird auf der Mittelachse des Modells bestimmt, wobei der Kugelradius gleich 90 Grad gesetzt wird. Die Horizontalebene, welche das Höhenniveau angibt, schneidet den soeben konstruierten Ellipsenast in dem gesuchten Raumpunkte. Dessen Länge beträgt 30 Grad positiv seine Breite 40 Grad negativ und seine Höhe 50 Grad positiv.

Es empfiehlt sich, im gläsernen Modell die Höhenellipsen durch steife Fäden anschaulich zu machen, die entsprechend gebogen sind. Da kein Raum Punkte haben kann, welche nicht zwischen 90 Grad positiver und negativer Länge, 90 Grad positiver und negativer Breite sowie 90 Grad positiver und negativer Höhe liegen, ist es in der Tat möglich, auf diese Weise jeden noch so abgelegenen Punkt eines Raumes exakt im Modell zu konstruieren.

§ 85. Eigenart des Raumkörpers.

Es ist wünschenswert, sich von der Eigenart der Raumstruktur einen möglichst vielseitigen Begriff zu bilden. Zu diesem Zwecke läßt sich der Raum noch auf eine andere, recht konkrete Art zur Darstellung bringen.

Man nehme zwei Kugeln von gleichem Radius und bringe ihre Oberflächen in einem Punkte zur Berührung.

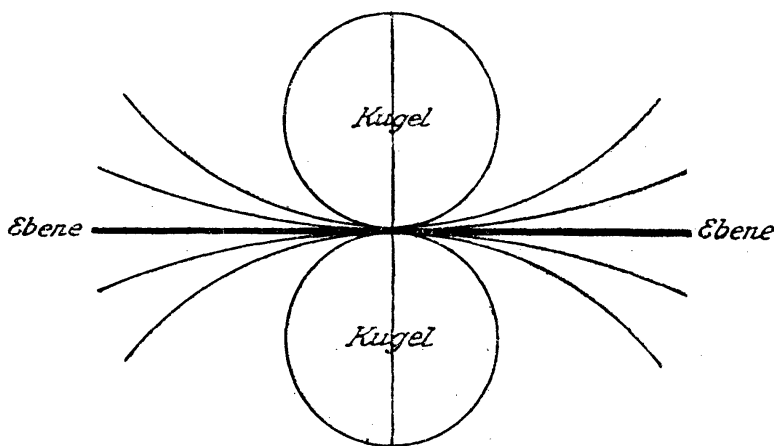


Fig. 23.

Nun denke man sich ihren Radius immer stärker vergrößert. Dann wird der Unterschied zwischen den Krümmungen langsam geringer werden. Die beiden Kugeloberflächen nähern sich in jedem bestimmten Punkte bei der Berührungsstelle einander gegenseitig. Wenn nun der unvermeidliche Grenzfall angenommen wird, daß die beiden Kugeloberflächen vollkommen ungekrümmt, also eine einzige Totalebene sind, so berühren sie sich nicht mehr bloß in einem Punkte, sondern auf ihrer gesamten Fläche. In diesem Falle haben die beiden Kugeln alle Endlichkeit verloren und stellen in ihrer Vereinigung

einen Raum dar, d. h. die dreidimensionale Unendlichkeit mit ihren beiden Polen, den ehemaligen Kugelmittelpunkten, und ihrer Totalebene, der ehemals doppelten Kugeloberfläche. Der Raum ist also der unendliche Grenzwert einer sich berührenden Doppelkugel. Er hat keine Schranke, sondern ist allseitig unendlich. Seine einzigen Strukturbestimmtheiten sind die Äquatorebene und die beiden Pole, welche von der letzteren einen Abstand von je $\frac{\infty}{2}$ besitzen.

§ 86. Die Zeit als Grundbegriff der Polargeometrie.

Die Gegenstände der Polargeometrie sind nicht als ruhende Bilder vorstellbar, sofern sie unendlich sind. Denn das menschliche Bewußtsein ist nicht dazu geschaffen, das Unendliche als Bild anschauen zu können. Trotzdem ist aber die Polargeometrie durchweg konkret, bestimmt, klar und empirisch begründet. Dies geschieht durch Einführung zeitlicher Prozesse.

Die Polargeometrie legt zwar nicht Gerade, Ebene und Raum in ihrer Totalität jedermann vor Augen. Sie gibt aber Anweisung, diese Prinzipien als Grenzwerte eines in seinem Verlauf durchaus anschaulichen Prozesses zu betrachten. Die unendlichen Gebilde der objektiven Geometrie sind Ideen im Kantischen Sinne, d. h. sie stehen am äußersten Ende eines Erfahrungsprozesses, und bilden dessen unvermeidlichen Schlußstein.

Die Zeit gehört somit zu den Grundbegriffen der Polargeometrie. Die Geometrie hat in moderner Zeit immer mehr ihre euklidische Starrheit verloren. Sie hat in reichem Maße den Begriff der Bewegung aufgenommen. Sie spricht seit Desargues von bewegten Punkten, Geraden und Ebenen. Indem die Polargeometrie diese moderne Tendenz der Geometrie noch verstärkt, geht sie mit der Entwicklung konform. Der realste der Erfahrungsbegriffe, die Zeit, soll keineswegs aus der Geometrie eliminiert werden, sondern soll die Gewähr für die Objektivität des Systems noch erhöhen.

In der Geometrie muß anstelle der euklidischen Starrheit der Begriffe ein lebendiges „Panta rhei“ von Bewegungen und Evolutionen treten. Sie muß gegen zwei Fronten einen besseren Standpunkt vertreten. Einerseits wendet sie sich gegen die Forderung ruhender Anschaulichkeit für solche Dinge, die ihrem Wesen nach nicht auf diese

Weise angeschaut werden können. Anderseits bekämpft sie aber auch den unempirischen Standpunkt des Logismus, der die Anschauung überhaupt zu mißachten geneigt ist. Gegenüber diesen beiden Standpunkten vertritt die Polargeometrie den dritten, daß die empirische Anschauung das einzig wertvolle Fundament der Geometrie ist, daß aber die unendlichen Größen, also Gerade, Ebene und Raum, nicht als unmittelbare Erfahrung dargeboten werden können, sondern bloß als Ideen im Kantischen Sinne, welche am äußersten Ende einer anschaulichen Erfahrungsreihe stehen. Die Polargeometrie beruht ganz und gar auf Erfahrung. Es liegt aber in der Natur der Dinge, daß diese Erfahrung unter Umständen nur mittelbar, darum aber doch nicht weniger sicher ist. Da wir Stücke von Geraden oder Ebenen aus der Erfahrung kennen, auch den Übergang zwischen gekrümmten und ungekrümmten Gebilden aus der Erfahrung kennen, ist es in der Tat eine sehr billige und leicht erfüllbare Forderung, sich die Totalität einer Geraden oder Ebenen als Kantische Idee zu denken.

§ 87. Die tiefere Ursache der Unvorstellbarkeit der unendlichen Totalität.

Es ist dem Verfasser wohlbekannt, daß seine Theorie des in sich geschlossenen Raumes, der in sich geschlossenen Ebene und der in sich geschlossenen Geraden bei den meisten Menschen notwendig auf ein großes Hindernis stößt, das sich daraus ergibt, daß diese Dinge tatsächlich nicht vorgestellt werden können, wenn man unter Vorstellung eine ruhende bildliche Ansicht der ganzen Sache versteht. Wenn man sich eine Linie als in sich geschlossen vorstellen soll, so muß man sie sich auch gekrümmt vorstellen. Der Hauptgedanke dieses Buches ist aber gerade der, daß die Ebene, der Raum und die Gerade ungekrümmt in sich selbst zurücklaufen. Diese scharfe Unterscheidung der Begriffe „gekrümmt“ und „geschlossen“ ist unserm Buche wesentlich, und die Erkenntnis, daß eine Linie oder Fläche geschlossen sein könne, ohne gekrümmt zu sein, ist wohl eine der Fundamentalerkenntnisse der Geometrie.

Da die Ingeschlossenheit einer ungekrümmten Linie oder Fläche nur logisch bewiesen, aber nicht angeschaut werden kann, ist es wünschenswert, sich davon Rechenschaft zu geben, in welcher Weise diese scheinbare Unzulänglichkeit der menschlichen Anschauung

mit dem Wesen des Bewußtseins unzertrennlich verbunden ist. Ich möchte diesen etwas tief liegenden Punkt populär faßbar machen. Jedermann kann leicht die wichtigste Wahrheit der Philosophie einsehen, nämlich, daß alle Dinge in der Welt polar geordnet sind. Nicht nur führt die Polargeometrie dieses Prinzip der objektiv herrschenden Polarität zu seinem höchsten Triumph, sondern die Natur selbst zeigt uns die Polarität am Unterschied der Geschlechter. Ein menschliches Bewußtsein ist — schon nach Plato — immer nur die Hälfte einer Ganzheit, und es kann also auch nur die Hälfte der Unendlichkeit vorstellen. Nehmen wir zwei Bewußtseine, so können sie die ganze Unendlichkeit umfassen, nämlich jedes eine Hälfte. Ein einzelner Mensch aber kann ebenso wenig die in sich geschlossene Unendlichkeit vorstellen wie ein Kind erzeugen. Denn jedes menschliche Bewußtsein ist nur eine Hälfte, deren Ergänzung gesucht werden muß.

Der Verfasser hofft, daß der philosophische Leser von hier aus die logische Zweiteilung der Ebene und die beiden Seiten der Lambert'schen Münze in einem neuen Lichte gewahren wird.

§ 88. Logik, Ethik und Geometrie als die apriorischen Wissenschaften.

Seit dem 18. Jahrhundert ist es allgemein gebräuchlich geworden, die Wissenschaften der Logik, Ethik und Ästhetik als die drei apriorischen Wissenschaften zu betrachten. Das „Wahre, Gute und Schöne“ wurde zur stehenden Gedankenverbindung der nachkantischen Philosophie. Apriorisch heißt, auf Begriffen ruhend, die das Bewußtsein nicht aus der Erfahrung entnimmt, sondern auf Grund deren es Erfahrungen erst möglich macht. Solche Begriffe sind z. B. wahr, falsch, gut, böse.

Nun ist es aber von vornherein sicher, daß dem Gegensatz schön: häßlich nicht dieselbe Objektivität innewohnt wie den Gegensätzen wahr: falsch und gut: böse. Daß die ästhetischen Urteile subjektiver als die logischen und ethischen sind, kann nicht übersehen werden. Auch hier muß dies betont werden, da die Stelle, welche von der Ästhetik eingenommen zu werden pflegt, eigentlich der Geometrie zukommt. Sie allein ist die objektiv apriorische Wissenschaft von der reinen Anschauung.

Die drei objektiven Gegensätze des Bewußtseins und der Erfahrung zugleich sind diejenigen des Wahren und Falschen, des Guten und Bösen, und des Geraden und Krummen. Der erste Gegensatz liegt der Logik, der zweite der Ethik und der dritte der Geometrie zugrunde. Die Geometrie ist also ein Teil der Philosophie wie die Logik und Ethik. Man könnte sogar die Ansicht vertreten, daß die kritische Philosophie nur drei Grundwissenschaften umfassen könne, nämlich Logik, Ethik und Geometrie. Alle anderen Wissenschaften ermangeln der Einfachheit, welche diesen dreien innewohnt. Sogar die Arithmetik und Algebra ist eine aus logischen und geometrischen Voraussetzungen zusammengesetzte Wissenschaft, welche der willkürlichen Erfindung mehr Raum gestattet als die Geometrie, welche unter den drei philosophischen Grundwissenschaften vielleicht die objektivste genannt werden kann.

Die Zugehörigkeit der Geometrie zur Philosophie sei hier auch deshalb gebührend hervorgehoben, weil gegenwärtiges Buch eine kritische Grundlegung der Geometrie, auch nach philosophischen Gesichtspunkten, enthält.

§ 89. Bedeutung des Gesetzes von der Erhaltung der geometrischen Elemente für die Polargeometrie.

Wenn die Frage erhoben wird, ob zwei Parallelen sich schneiden oder nicht, sind heute viele Gelehrte geneigt, zu behaupten, das könne man nicht wissen, weil darüber eine unmittelbare objektive Entscheidung nicht vorzuliegen scheint. Die Entscheidung für den einen oder den anderen Standpunkt sei also bloß eine subjektive Willkür.

Demgegenüber verweist die Polargeometrie auf das Gesetz der Erhaltung der geometrischen Elemente (vgl. § 37). Wenn dieses zugegeben wird — und es ist dem Bewußtsein unmöglich, es bei klarer Besinnung nicht zuzugeben —, so ist als objektiv und denknotwendig gewährleistet, daß zwei Parallelen sich schneiden und daß eine Gerade reelle Mittelpunkte besitzt.

Wenn nicht das Wunder in der Geometrie auf den Thron erhoben werden soll, ist die objektive Eindeutigkeit der Geometrie durch eine erdrückende Fülle von Beweisgründen nachgewiesen. Das Gesetz von der Erhaltung der geometrischen Elemente ist der Prüfstein und der Scheidepunkt der

Geister. An ihm wird es klar, ob die gründliche Urteilskraft oder der Wille zum schwankenden Relativismus um jeden Preis ein Bewußtsein beherrscht.

§ 90. Die Bedeutung der Lehrsätze der euklidischen Geometrie innerhalb der Polargeometrie.

Die moderne Geometrie weist darauf hin, daß die Annahme einer nichteuklidischen Geometrie auch gewisse sehr bekannte Lehrsätze der Elementargeometrie ausschließe. So lesen wir in Simons Euklidausgabe (S. 35): „Beinahe unmittelbar klar ist, daß das Parallelenaxiom des Euklid sich deckt

1. mit der Existenz des Rechtecks oder, was dasselbe ist, mit dem Satz: Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei Rechte,
2. mit der Existenz ähnlicher Dreiecke,
3. mit dem Satz: Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter,
4. mit dem Satz: Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets ein Kreis möglich, oder, was dasselbe ist: Zwei Gerade, welche auf sich schneidenden senkrecht stehen, schneiden sich ebenfalls.“

Die hier vertretene Polargeometrie ist zweifellos eine nicht-euklidische Geometrie, aber wohlgedacht auch eine Geometrie des Unendlichen. Begibt man sich in die Sphäre des Endlichen, so ist die Polargeometrie mit der euklidischen, was die einzelnen Lehrsätze betrifft, völlig identisch. Es besteht also durchaus kein Anlaß zu dem Glauben, so selbstverständliche Sätze wie die obenerwähnten würden durch die neue Geometrie verändert werden. Vor einer solchen „Reformation“ des Allersichersten würde man sich mit Recht scheuen dürfen. Sondern die Polargeometrie erkennt, daß der Mensch im Verhältnis zum Raum ein unendlich kleines Sandkorn ist, für dessen Anschauungsbereich die altbewährten Lehrsätze volle Gültigkeit besitzen. (§ 20.) Die Polargeometrie ist die Geometrie des Unendlichen, die sich als solche von der euklidischen wesentlich unterscheidet. Nichtsdestoweniger enthalten ihre Lehrsätze für menschlich kleine Größen nichts, als was mit gutem Recht bei allen Menschen stets als richtig gegolten hat. Gerade weil die Polargeometrie in mancher Hinsicht reformatorisch geartet scheint, muß sie bei jeder Gelegenheit

betonen, daß sie vor den Fundamenten des bisherigen Denkens viel weniger abweicht als sogar die nichteuklidischen Geometrien in bisheriger Auffassung, die in der Wissenschaft das Heimatsrecht erworben haben.

§ 91. Die Dreiteilung eines Winkels.

Auf dem Boden der euklidischen Geometrie ist bekanntlich die Aufgabe, einen beliebigen Winkel mittelst Zirkel und Lineal in drei genau gleiche Teile zu teilen, unlösbar. Es wäre aber zu merkwürdig, wenn ein solches Problem unter allen Umständen unlösbar bleiben sollte. In der Polargeometrie ist denn auch dieses berühmte Problem theoretisch exakt lösbar, obwohl praktisch die betreffende Lösungsmethode aus Mangel an genügend großen Werkzeugen niemals angewandt werden kann. Die Dreiteilung eines Winkels geschieht auf Grundlage der Polargeometrie in folgender Weise:

Man zeichne den zu teilenden Winkel auf die Ebene und mache seine Schenkel $\frac{\infty}{2}$ lang. Man verbinde die so gewonnenen Endpunkte der Schenkel durch eine Gerade. Man teile diese Gerade nach elementarem Prinzip in drei gleiche Teile. Man verbinde die beiden Teilpunkte mit dem Scheitel. Dann ist der Winkel in drei gleiche Teile geteilt, was man sich wieder am Kugelglobus anschaulichst klar machen kann.

Praktisch ist diese theoretisch einwandfreie Konstruktion deshalb nicht realisierbar, weil weder eine vollständige Ebene noch Werkzeuge von geeigneten Ausmessungen uns zur Verfügung stehen.

§ 92. Berechnung des Rauminhaltes in beliebigen Kubikeinheiten.

Der Raum der objektiven Geometrie hat einen bestimmten Kubikinhalte. Es fragt sich, wie man ihn berechnet. Man hat zu diesem Zweck folgende Sachverhalte zu beachten:

1. Der Flächeninhalt einer Totalebene ist, wie aus dem Kugelmodell klar ersehen werden kann, gleich dem achtfachen Betrag eines rechtwinklig-gleichseitigen Geradendreiecks.

2. Der Kubikinhalte eines Totalraums ist, wie aus gleichen Gründen hervorgeht, und wie an der Reversionskugel veranschaulicht werden kann, gleich dem sechzehnfachen Betrag eines Tetraeders von der

Seitenlänge $\frac{\infty}{2}$, oder anders ausgedrückt gleich dem sechzehnfachen Betrag eines Tetraeders mit rechten Winkeln.

Diese beiden Hauptsätze der Raumberechnung stellen uns vor die Fragen:

A. Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinklig-gleichseitigen Geradendreiecks?

B. Wie groß ist der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Tetraeders?

Von diesen beiden Fragen kann a priori ausgesagt werden, daß sie unlösbar sind, so bald ausgemacht ist, daß die Länge der Konstanten ∞ nicht bestimmt angegeben werden kann. Andererseits ist ebenso sicher, daß die beiden Fragen prinzipiell lösbar sein müssen, so bald ausgemacht ist, welche bestimmte Länge der Naturkonstanten ∞ zukommt.

Nehmen wir also für einen Augenblick an, die Länge der Naturkonstanten ∞ sei bekannt, und fragen wir uns, auf welche Weise dann der Inhalt der obengenannten Fläche und des obengenannten Raumteiles ausgemacht werden könnte. Auf diese Frage kann es nur eine einzige Antwort geben: Da die gebräuchlichen stereometrischen Inhaltsformeln auf dem Gebiet des Unendlichen grundsätzlich nicht in Betracht kommen, und da wir die Formeln zu ihrem Ersatze noch nicht kennen, ist der Flächeninhalt eines rechtwinklig-gleichseitigen Dreiecks nur auf empirischem Wege bestimmbar, während man auf den Inhalt des entsprechenden Raumteiles nach Analogie schließen kann.

Genau wie jemand, der den Inhalt eines Kreises und einer Kugel nicht kennt, am sichersten dadurch zu einer Beantwortung seiner Frage gelangt, daß er die beiden Figuren durch kleine Einheiten anfüllt und dieselben nachher zählt, so werden wir modernen Denker, sobald wir nur Mittel und Wege dazu finden, den Inhalt von Totalebene und Raum auf ebenso primitive, aber auch ebenso sichere Weise bestimmen. Die Polargeometrie ist in ihren ersten Voraussetzungen auf Erfahrung gegründet und sieht sich bezüglich ihrer letzten Aufgabe, der Inhaltsberechnung von Totalebene und Totalraum, wieder auf die Erfahrung angewiesen. Ja auch die Länge der Naturkonstanten ∞ kann sie, wie a. a. O. gezeigt ist, nur auf dem Wege der Erfahrung feststellen. Wie groß die Konstante ∞ ist, will dieses Buch nicht entscheiden. Mag sie nur einige Zehntausend Kilometer betragen oder Tausende von „Lichtjahren“ — das ist für

die Geometrie als solche gleichgültig. Nachgewiesen ist, daß diese räumliche Weltkonstante ∞ existiert.

§ 93. Empirischer Charakter der Polargeometrie.

Durch das Zurückgreifen auf Erfahrung schmeichelt die Polargeometrie keineswegs den logistischen Bestrebungen in der geometrischen Grundlagenforschung. Aber sie ist zum Ersatz dafür auch um so viel eindeutiger als der Standpunkt, der die Welt der Geometrie aus reinem Gedankenstoff erschaffen möchte. Man findet in der ganzen Natur bestätigt, daß die geometrischen Größen und Gestalten eine objektive Existenz besitzen. Der Bau der einfachsten Pflanzen und Tiere wie der kunstvolle Bau des menschlichen Körpers oder die Ordnung der Gestirnsbewegungen sagen gleicherweise aus, daß die Geometrie nicht erst vom Menschen geschaffen wird, sondern unabhängig von ihm in der Natur angelegt ist. Wenn also der Mensch in den vieldeutigen Gedankenverläufen seiner „logisch möglichen“ Geometrien einen sicheren Kompaß vermißt, so kommt es daher, daß er die allgemeinsten geometrischen Erfahrungen zu gering eingeschätzt hat.

Eine Geometrie, die in der Tat gewillt ist, der Erfahrung das erste und letzte Wort zu geben, kommt, wie wir gesehen haben, niemals in Verlegenheit, ihr Prinzip durchzuführen. Welche Neuheiten sich auch bei dieser Gelegenheit ergeben — immer ist sicher, daß sie gründlicher fundiert sind als alle scheinbar besseren Aussagen, die nicht auf eine eindeutig zuverlässige Wurzel zurückgeführt werden können. Das Reformatorische an der Polargeometrie beruht nicht, wie dies bei Neuerungen manchmal der Fall sein soll, auf vermehrter Fahrlässigkeit, sondern, wie jedermann zu kontrollieren in der Lage ist, auf vermehrter Berücksichtigung der Wirklichkeit mit ihren Erfordernissen der Kontinuität und der Erhaltung der geometrischen Elemente. Möge dieser empirische Charakter des neuen, schulgemäßen Systems der nachdenklichen Erwägung seiner Lehren förderlich sein.

Die Priorität für die Erkenntnis der logischen Möglichkeit einer solchen Geometrie gebührt Riemann. Die Priorität für die Erkenntnis der Einzigrichtigkeit dieser Geometrie und für die Einzelheiten ihrer Ausführung beansprucht der Verfasser dieses Buches.

