

den grünen Teil des Kugelmodells der Ebene enthält. Die logische Zweiteilung der Ebene wird sehr treffend durch die beiden Seiten der Münze ausgedrückt. Die Münzenfläche ist also stets als sog. „einseitige Fläche“ aufzufassen.

Im folgenden benutzen wir die Lambertsche Münze regelmäßig zur Darstellung der Kurvenverläufe auf der Totalebene. Wir zeichnen dabei die Vor- und Rückseite der Münze nebeneinander. Wir bezeichnen diese beiden Hälften der Ebene als Stellung A und Stellung B, ganz entsprechend der Normalstellung A und der Normalstellung B am Kugelmodell. Die Münze werde immer um die Y-Achse gedreht.

Die theoretische Bedeutung der Lambertschen Münze liegt darin, daß sie erlaubt, die ganze unendliche Ebene der objektiven Geometrie mathematisch getreu auf einer endlichen Fläche ohne Vermehrung der Dimensionen abzubilden. Daß dabei die Umkehrbarkeit der Münze die wesentliche Rolle spielt, ist augenscheinlich. Dieser Charakter der Lambertschen Münze läßt erhoffen, daß man durch ihre Vermittlung auch den dreidimensionalen Totalraum werde mathematisch adäquat abbilden lernen. In einem späteren Paragraphen soll darauf näher eingegangen werden.

§ 57. Darstellung des Verlaufes einer gleichseitigen Hyperbel auf der Lambertschen Münze.

Da durch die Paragraphen 53 und 55 bereits Aufschluß über den Gesamtverlauf von Hyperbeln gegeben ist, erübrigt sich nur noch,

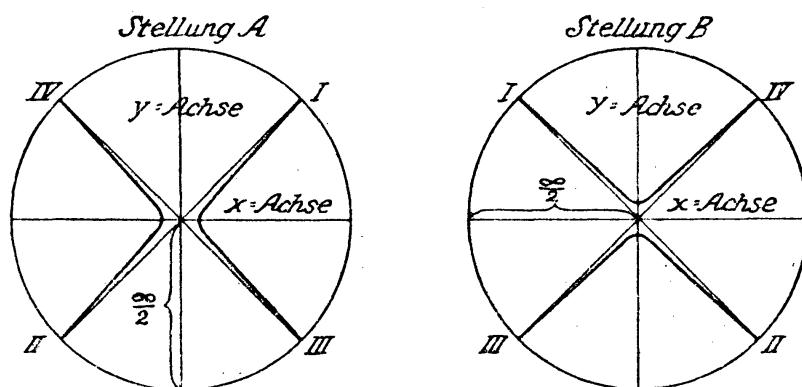


Fig. 18.

den Verlauf auf der Lambertschen Münze zu veranschaulichen. Wir wählen als Beispiel der Einfachheit halber eine gleichseitige Hy-

perbel. Deren Verlauf bei positivem a^2 ist der folgende, wobei festzuhalten ist, daß der Durchmesser der Münze die Länge unendlich darstellt, aus welchem Grunde die entsprechende Länge a für den „Hyperbeldurchmesser“ in der Regel sehr klein sein wird.

Wir zeichnen nur diese Figur, da ein Kommentar durch die §§ 53 und 55 bereits geliefert ist.

§ 58. Der Verlauf der Parabel und seine Darstellung.

Zugrundegelegt sei die Parabel, deren Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ ist. Es fragt sich,

1. welches ihr Gesamtverlauf auf der Ebene ist, d. h. ob ihr größter Durchmesser $\frac{\infty}{2}$ oder ∞ oder 2∞ beträgt;

2. welchen Maximalwert die Ordinate y der Parabel erreicht. Denn daß ein solcher Maximalwert besteht, folgt aus der Ingeschlossenheit der Ebene. Und aus demselben Grunde ist klar, daß uns mit der unbestimmten Angabe der Lehrbücher, welche auf euklidischem Standpunkt stehen, nicht gedient ist. Die Lehrbücher lassen uns hier ganz im Stich.

Betreffs der ersten Frage ist sicher, daß der größte Durchmesser nicht 2∞ betragen kann. Sonst müßte die Parabel wie die Hyperbel aus zwei Ästen bestehen, die sich vom gemeinsamen Scheitel aus von einander entfernen. Die Analytik lehrt zweifellos, daß die sich nach der entgegengesetzten Seite entfernende Parabel einen negativen Parameter besitzt, also eine andere Kurve darstellt. Es ist, wie bald gezeigt wird, die Gegenkurve der ursprünglichen Parabel.

Ferner ist auch sicher, daß der große Durchmesser einer Parabel nicht die Länge $\frac{\infty}{2}$ haben kann. Denn da die in der Nähe des Poles zu diesem Durchmesser parallelen Sehnen aus Gründen des analytischen Zusammenhanges bekanntlich als Durchmesser aufgefaßt werden müssen, und da diese Durchmesser sich alle in der Entfernung $\frac{\infty}{2}$ vom Scheitel schneiden, kann sich in dieser Entfernung erst der Mittelpunkt, nicht aber der zweite Scheitel der Parabel befinden.

Es bleibt also nur die Möglichkeit übrig, daß der größte Durchmesser einer Parabel die Länge ∞ besitzt, welche Möglichkeit auch dadurch als einzig zutreffend erwiesen wird, daß auf ihrem Grunde

die beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $y^2 = -2px$ als Gegenkurven, d. h. als Kurven aus den sphärischen Gegenpunkten, erscheinen. Gegengründe gegen die Annahme bestehen nicht. Es ist also nunmehr als festgestellt zu betrachten, daß die Entfernung zwischen den beiden Polen einer Parabel die Strecke ∞ beträgt.

Bezüglich der zweiten Frage hat man sich an die Gleichung zu halten. Zu bestimmen ist, welchen Wert y für $x = \frac{\infty}{2}$ erhält. Es ergibt sich hierfür unmittelbar: $y = \sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$, wobei die Naturkonstante $\frac{\infty}{2}$ in keiner Weise beseitigt werden kann, sondern als definite Strecke ihre gewöhnliche geometrische Bedeutung hat. Der Maximalwert der Parabelordinaten beträgt also nicht, wie man mitunter lesen kann, „unendlich“, sondern $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$.

Wir haben nun die Parabel auf der Lambertschen Münze abzubilden. Dies geschehe für die Gleichung $y^2 = 2px$, und wir halten es für empfehlenswert, die Parabel $y^2 = -2px$ gleich mit auf dieselbe Figur zu zeichnen, da man auf diese Weise klar erkennt, daß diese Kurve die Gegenkurve der ursprünglichen ist. Sie wird zum Unterschied von der ersten Parabel gestrichelt.

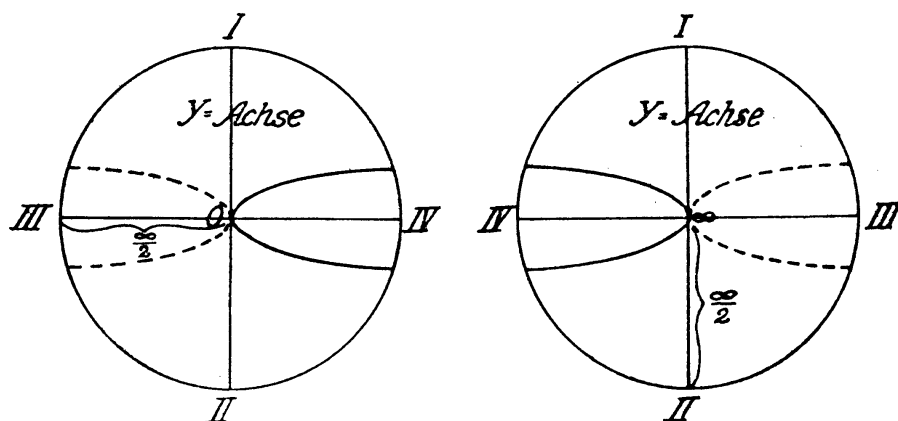


Fig. 19.

Es empfiehlt sich, die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, daß jede Parabel, genau wie es von der Geraden ausgemacht wurde, nur eine Ebenenhälfte bedeckt, und daß die andere Ebenenhälfte für die Gegenkurve reserviert bleibt. Die Ebenenhälften für die obigen Parabeln fallen jedoch nicht mit den Seiten der Münze zusammen, sondern teilen, wie man sieht, diese Seiten in zwei Hälften.

§ 59. Eine neue Eigenschaft der Parabel.

Da man für die Parabel im allgemeinen nur die Scheitelgleichung in Betracht zu ziehen pflegt, hat man eine schöne Eigenschaft dieser Kurve, welche sich auf die Brennpunktsgleichung stützt, bisher übersehen. Sie möge hier angegeben sein. Zunächst aber seien auch einige besonders empfehlenswerten Formen der Brennpunktsgleichung angegeben, und zwar für diejenige Lage der Parabel, bei welcher die große Achse mit der Y-Achse zusammenfällt. Diese Stellung der Parabel glaubt der Verfasser wegen ihres besonderen Beziehungsreichtums als die Normalstellung der Parabel bezeichnen zu sollen.

Die Brennpunktsgleichungen der Parabel, von deren Richtigkeit sich jeder Nachprüfende leicht überzeugen kann, lauten:

$$1. x^2 = p(p-2y).$$

$$2. x^2 = (a+y) \cdot (a-y), \text{ wobei } a = p-y \text{ ist. (Siehe Figur.)}$$

$$3. x^2 = a^2 - y^2.$$

$$4. \frac{a+y}{x} \cdot \frac{a-y}{x} = 1.$$

$$5. \left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1.$$

$$6. \tan^2 \gamma_1 - \tan^2 \gamma = 1, \text{ wobei } a : x \text{ gleich } \tan \gamma_1, y : x \text{ gleich } \tan \gamma \text{ gesetzt ist. (Siehe Figur.)}$$

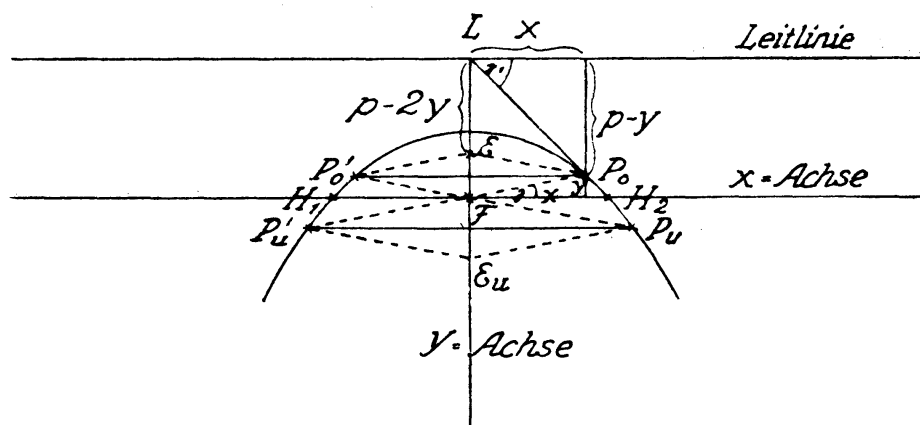


Fig. 20.

Die neue Eigenschaft der Parabel, die hier festgestellt werden soll, bezieht sich auf das Ähnlichkeitsverhältnis, welches zwischen den Teilen der Kurve über und unter der X-Achse besteht. Es ist nämlich,

da $\frac{y}{x} = \pm \tan \gamma$ beträgt, $x^2 \pm 2px \cdot \tan \gamma - p^2 = 0$. Also:

$$x = \pm p \cdot \operatorname{tang} \gamma \pm p \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + 1} = \pm p (\pm \operatorname{tg} \gamma \pm \sec \gamma) = \frac{p(1 - \sin \gamma)}{\pm \cos \gamma}.$$

Wir setzen nun γ positiv und negativ, um die Werte von x und y sowohl für den oberen als für den unteren Teil der Kurve zu bestimmen. (Siehe Figur.) Dann wird bei negativem Winkel der Sinus das Vorzeichen wechseln, während der Cosinus unverändert bleibt. Wir bezeichnen die Koordinaten für den oberen Teil der Kurve mit dem Index $_o$, die Koordinaten für den unteren Teil mit dem Index $_u$.

$$\text{Dann ist } x_o = \frac{p(1 - \sin \gamma)}{\pm \cos \gamma}; \quad x_u = \frac{p(1 + \sin \gamma)}{\pm \cos \gamma}; \quad y_o = x_o \cdot \operatorname{tg} \gamma;$$

$$y_u = x_u \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Nun besagt die Gleichung $x^2 = p(p-2y)$, daß jedes x mittlere Proportionale zwischen p und $p-2y$ ist. Stellt man letztere Strecke geometrisch dar, was in der Figur geschehen ist, so erkennt man aus den Diagonalen, daß der Endpunkt E zusammen mit F , P_o , und dem zu P_o bezüglich der Y -Achse symmetrischen Punkt P_o' stets ein Rhombus bildet. Jeder Parabelpunkt ist also mit einem Rhombenpaar verbunden zu denken, dessen zweiter Rhombus nach der unteren bzw. oberen Gegenseite liegt und den durch den Winkel $-\gamma$ bezeichneten Parabelpunkt zur Ecke hat.

Die neue Parabeleigenschaft lautet demnach: Bewegt sich ein Punkt auf der Parabel, so bewegt sich als seine Funktion ein scheitelwinklig zusammengefügtes Rhombenpaar, dessen Seiten sich verhalten

$$\text{wie } \frac{x_o}{x_u} = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \text{ oder reziprok, und dessen Diagonalen jedesmal}$$

gleich $2x$ und $2y$ sind. Die Parabel ist also der geometrische Ort eines alle positiven reellen Werte durchlaufenden Ähnlichkeitsverhältnisses, das beim Durchgang durch die X -Achse gleich 1 wird.

Interessant ist wohl auch die Tatsache, daß die Parabel $x^2 + y^2 = a^2$ und der Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ äußerlich genau dieselbe Gleichung besitzen. Nur ist beim Kreis die Länge a eine Konstante, während bei der Parabel das a die Variable $(p-y)$ bedeutet.

Für den Maximalwert des x hat der untere Rhombus beide Parabelbrennpunkte zu Ecken, während der „obere“ Rhombus für diesen Übergangswert in doppelter Ausführung existiert, nämlich in jeder der beiden Parabelkuppen ein Mal. Und zwar fällt jeweils einer seiner Eckpunkte mit dem Brennpunkt zusammen, während der gegenüberliegende in den Leitpunkt L fällt.

Obwohl all diese Beziehungen zum Verständnis der Polargeometrie nicht notwendig sind, wird man ihren reizvollen Charakter, so bald man sich in sie versenkt, lebhaft empfinden. Aus diesem Grunde schienen sie dem Verfasser der Mitteilung nicht unwert zu sein.

§ 60. Konstruktion des Ausdruckes $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$.

Im vorletzten Paragraphen wurde die Länge $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$ als Maximalwert der Ordinate einer Parabel $y^2 = 2px$ nachgewiesen. Es fragt sich, welche Länge diese Größe im Vergleich zu $\frac{\infty}{2}$ besitzt, und wie man sie konstruiert. Selbstverständlich kann eine Konstruktion mittelst unendlicher Längen schon deshalb nicht in Betracht kommen, weil das Ziehen von Parallelen auf so große Entfernungen nicht dazu benutzt werden kann, auf elementare Weise ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. Diese Verwandlungsaufgabe würde ja verlangen, daß Parallelen als Geraden von gleichbleibendem Abstand aufgefaßt werden können.

Deshalb kann die Konstruktion des obigen Ausdruckes nur in verkleinertem Maßstabe, also mittelst der Lambertschen Münze, exakt vorgenommen werden. Dies geschieht wie folgt: Man lege eine Strecke $\frac{\infty}{2}$ und eine im selben Maßstab verkleinerte Strecke $2p$ aneinander. Man schlage über der Gesamtstrecke den Halbkreis. Man errichte im Teilpunkt T der beiden Strecken das Lot. Dieses treffe den Halbkreis in einem Endpunkte E. Dann ist nach dem Satze von der Beziehung zwischen Höhe und Höhenabschnitten eines Dreiecks die Strecke TE die gesuchte Wurzel. Es läßt sich also von Fall zu Fall feststellen, welchen Bruchteil der Länge $\frac{\infty}{2}$ die Strecke $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$ bildet, und man kann ihren Betrag auf jeder Lambertschen Münze genau abtragen. Da die Strecke $2p$ im Verhältnis zu $\frac{\infty}{2}$ in der Regel sehr klein sein wird, ist die $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$ in der Regel eine Strecke, welche ebenfalls die Länge $\frac{\infty}{2}$ bei weitem nicht erreicht.

Ist dagegen $2p = \frac{\infty}{2}$, so wird auch $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}} = \frac{\infty}{2}$, d. h. die Parabel, deren Maximalordinate $\frac{\infty}{2}$ beträgt, hat einen Parameter p von $\frac{\infty}{4}$.

Dieser Grenzfall kann auf der Kugel demonstriert werden.

§ 61. Ellipse und Gegenellipse.

Die logische Zweiteilung der Ebene war Anlaß und Hilfsmittel zugleich, um den Gegensatz der Geraden $\frac{x}{a \pm 0} + \frac{y}{b \pm 0} = 1$ und $\frac{x}{a \pm \infty} + \frac{y}{b \pm \infty} = 1$, der Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, sowie der Parabeln $y^2 = 2px$ und $y^2 = -2px$ aufzustellen und zu erklären. Auch bei der Ellipse besteht dieser komplementäre Gegensatz, und zwar in den Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.

§ 62. Näheres über die Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$.

Obige Gleichung stellt nach der allgemein angenommenen Theorie einen Kreis mit imaginärem Radius dar. Man könnte daher auf den Gedanken kommen, unsere Erklärung im vorhergehenden Paragraphen sei falsch, da sie dem Kreis scheinbar einen reellen Radius zuweist. Um diesen Punkt klarzustellen, mögen folgende Überlegungen gestattet sein:

Faßt man quadratische Konstanten ins Auge, so erscheint die grüne Hälfte der Ebene als Ort negativer Konstanten. Faßt man dagegen lineare Konstanten ins Auge, so erscheint dieselbe Ebenenhälfte als Ort imaginärer Konstanten. Wir sagen daher deutlich: Die grüne Ebenenhälfte ist der Ort negativer quadratischer, d. h. imaginärer linearer Konstanten. Damit ist unsere Erklärung der strittigen Gleichung mit der Lehre vom Imaginären algebraisch vollkommen in Einklang gebracht.

Indessen besteht doch noch ein Gegensatz gegen die übliche geometrische Darstellung des Imaginären, die uns zu einer weiteren Überlegung veranlaßt. Wenn man, von der arithmetischen Zahlenachse ausgehend, die imaginären Zahlen auf einer Achse senkrecht dazu darstellt, so ist dieser Modus eine ganz willkürliche Festsetzung, die sich aber durch praktische Brauchbarkeit zur Veranschaulichung komplexer Zahlen bewährt hat. Indessen ist dieselbe Art der Darstellung imaginärer Zahlen vollkommen ausgeschlossen, wenn man von der analytischen Geometrie der Ebene ausgeht. Dann nämlich ist ja schon die ganze überblickbare Ebene, welche durch X- und Y-Achse beherrscht wird, von reellen Punkten ausgefüllt, und es ist also für imaginäre Größen da gar kein Raum. Es fragt sich also von neuem, wie man die imaginären Zahlen geometrisch lokalisieren soll. Denn gerade vom Standpunkt der analytischen Geometrie aus wird man sehr dringend auf imaginäre Längen geführt.

Die Lösung kann, so viel ich sehe, keine andere sein als die von uns hier vertretene, daß die imaginären Längen auf der grünen Hälfte der Ebene liegen. Die Zweiteilung der Ebene ist eine genaue Analogie zur Zweiteilung reeller und imaginärer Längen, oder positiver und negativer Quadrate. Wer mit dieser Theorie nicht glaubt einverstanden sein zu dürfen, müßte nicht nur obige Gleichung mit einer anderen passenden geometrischen Deutung versehen, sondern er hätte offenbar auch die Pflicht, uns mitzuteilen, wie er denn imaginäre Längen auf der analytischen Ebene anders darstellen will.

Wie bei den drei übrigen Gruppen von Kegelschnitten, so erklärt sich auch dieser Gegensatz aus der Zweiteilung der Ebene. Die Ellipse $x^2 + y^2 = -r^2$, die man auf Grund der euklidischen Geometrie durchaus nicht unterbringen kann, bedeutet sehr einfach nach genauer Analogie der Hyperbel $x^2 - y^2 = -r^2$ die Gegenkurve der Ellipse $x^2 + y^2 = r^2$. Verläuft die letztere um den Punkt ± 0 , so verläuft die erstere um den Gegenpunkt $\pm \infty$. Liegt die letztere auf der roten Ebenenhälfte, so liegt die erstere auf der grünen. Zur Erläuterung sei hier der soeben in Gleichung genannte Kreis und Gegenkreis auf der Lambertschen Münze dargestellt. Er gelte als Beispiel für die allgemeine Ellipse.

Besonders hervorgehoben sei nochmals, daß nur die Polargeometrie imstande ist, die Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$ unterzubringen, und daß

nur die Polargeometrie gestattet, alle möglichen Kegelschnitte mit sämtlichen Grenzfällen restlos darzustellen. Dies geschieht auf der Kugeloberfläche oder auf der Lambertschen Münze.

Es ergibt sich daraus, daß nur eine einzige Geometrie existiert die den Bedürfnissen des menschlichen Geistes allseitig gerecht wird

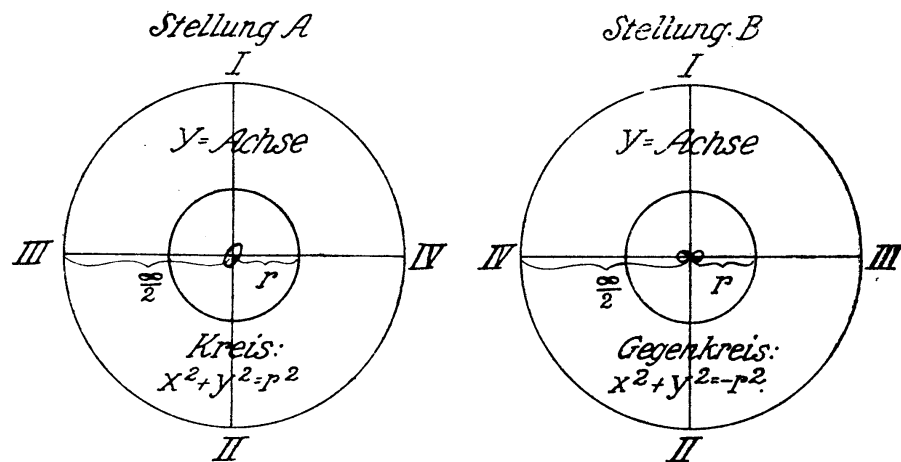


Fig. 21.

— nämlich die Polargeometrie, welche von Desargues und der nachfolgenden projektiven Geometrie bis Poncelet und Steiner deutlich vorbereitet, von Riemann und Helmholtz grundsätzlich neben die euklidische Geometrie gestellt wurde und von dem gegenwärtigen Buche als einzig kritische Elementargeometrie erwiesen wird. Der populäre Einwand, daß die Ebene aber in Wirklichkeit keine Kugel sei, dürfte übersehen haben, daß die Polargeometrie auf dreizehn klaren Definitionen beruht, deren Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch nicht bezweifelt werden kann. Auf Grund dieser Definitionen hält die Polargeometrie die Begriffe „Ebene“ und „Kugel“ scharf auseinander, ohne jedoch zu übersehen, daß sie beide als Flächen mit konstantem Krümmungsmaß alle wesentlichen Eigenschaften gemeinsam haben.

§ 63. Empfehlung der Benutzung einer Kugel.

Es ist dringend anzuraten, sich die hier genannten einfachen Gesetze der Kegelschnitte auf einer wirklichen Kugel klar zu machen. Die Schönheit der Zusammenhänge und die Unerläßlichkeit ihrer Annahme ist nur bei konkreter Anschauung voll zu erfassen. Bei dieser Gelegenheit wird der Leser den bescheidenen Anfängen, die hier ge-

geben sind, aus eigenen Mitteln gewiß manches Neue hinzufügen können, da die Erkundung der Kegelschnitte auf der Kugel ein ebenso fruchtbares wie aufschlußreiches Gebiet darstellt. Erst auf der Kugel erhalten die Kegelschnitte ihre wahre Vollendung. Erst hier kann man ihren vollständigen Lauf überblicken. Erst hier verschwinden die Regionen, in denen bisher der Gedanke im Dunkeln zu tasten verurteilt war. Es wird daher wohl eine Zeit kommen, wo der Lehrer und Professor der Geometrie seine Figuren nicht mehr auf die Wandtafel, sondern auf einen entsprechend großen Globus zeichnet, wenn nicht vielleicht sogar Lambertsche Münzen in reichlichen Gebrauch kommen sollten. Denn eine Wandtafel stellt ja nur ein winziges Fragment der Ebene dar, während die beiden moderneren Darstellungsmittel die gesamte Ebene repräsentieren. Sie erst sind also instande, auch die durch das Unendliche verlaufenden Kurven in ihrer ganzen Bahn nach mathematisch exaktem Gesetz darzustellen.

§ 64. Ellipse, Parabel und Hyperbel in ihrem Zusammenhang.

Daß die Parabel den kontinuierlichen Übergang zwischen Ellipse und Hyperbel darstellt, vorausgesetzt daß die Abwandlung der Figur nach geeignetem Gesetz geschieht, ist eine der ältesten Erkenntnisse der Kegelschnittgeometrie, die durch zahlreiche Beziehungen erhärtet wird. Den längst bekannten Kennzeichnungen dieses Überganges sei hier eine neue hinzugefügt, die sich nur auf der Kugel feststellen läßt. Man zeichne auf der Kugeloberfläche eine vollständige Hyperbel, Parabel und Ellipse. Bezeichnet man in diesen drei Figuren denjenigen Durchmesser, der sich innerhalb der Kurve zwischen den beiden entgegengesetzten Hauptpolen erstreckt, als die große Achse der Figur, so besteht das Gesetz:

Die große Achse einer Ellipse ist kleiner als ∞ , größer als 0.

Die große Achse einer Parabel ist gleich ∞ .

Die große Achse einer Hyperbel ist größer als ∞ , kleiner als 2∞ .

Dieses Gesetz ist gewiß der Mitbeachtung wert. Man verkannte es bisher deshalb, weil man in Ermangelung des Überblickes bei der Hyperbel anstelle der soeben definierten großen Achse ihre Differenz

von 2∞ in Betracht zog und diesen äußeren oder Scheindurchmesser, der natürlich stets kleiner als ∞ bleibt, als sog. „große Achse“ ($2a$) der Hyperbel bezeichnete.

§ 65. Die Gerade als Grenzfall von Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Läßt man bei der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Achse b bis $\frac{\infty}{2}$ wachsen, so geht die Ellipse in ein Geradenpaar über, das bezüglich der X-Achse zur Y-Achse parallel verläuft. Dasselbe Geradenpaar ergibt sich als Grenzwert der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ für $b = \frac{\infty}{2}$. (Siehe Figur.)

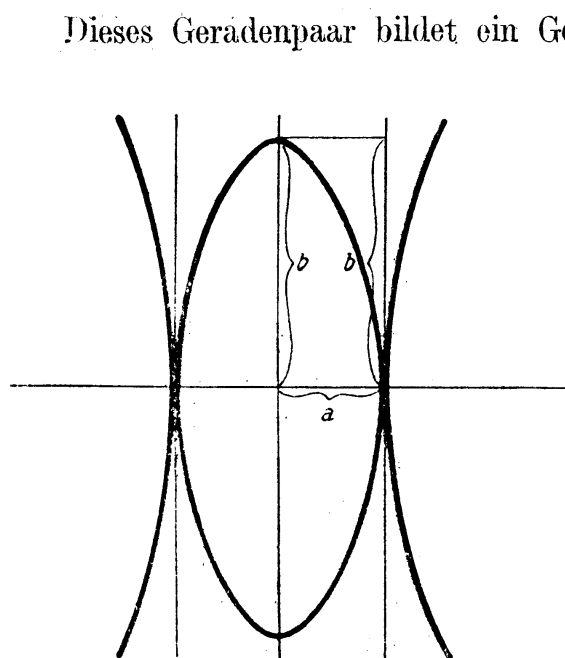


Fig 22.

Dieses Geradenpaar bildet ein Geradenzweieck, wie denn überhaupt die Tatsache ausgesprochen zu werden verdient, daß die Polargeometrie Geradenzweiecke kennt, ja auch Geradendreiecke mit einer Winkelsumme bis zu drei Rechten, welche Verhältnisse man sich wieder auf der Kugel klarmachen kann. Aus der obigen Übergangsbeziehung geht hervor, daß der Grenzwert zwischen Ellipse und Hyperbel unter Umständen keine Parabel zu sein braucht, sondern auch ein Geradenpaar sein kann.

Es ist ferner bekannt, daß jede Hyperbel, deren beide Achsen gleich null werden, in das Asymptotenkreuz übergeht, welcher Fall der Vollständigkeit halber angeführt sei.

Es ist ebenso klar, daß die Parabel $y^2 = 2px$ für $p = \frac{\infty}{2}$ in ihre Scheiteltangente übergeht.

Ebenfalls selbstverständlich ist, daß der Kreis $x^2 + y^2 = \left(\frac{\infty}{2}\right)^2$ eine Gerade ist, und zwar der Ebenenäquator.

§ 66. Das wesentliche Verhältniß von Gerade, Kreis und Punkt.

Der Kreis mit dem Radius 0 ist ein Punkt. Der Kreis mit dem Radius $\frac{\infty}{2}$ ist eine Gerade. Gerade und Punkt sind also die extremen Grenzwerte eines Kreises. Sie stehen an den beiden Eckpunkten einer kontinuierlichen Reihe. Sie besitzen also einen polaren oder dualen Gegensatz. Der Kreis ist gleichsam nur der verbindende Übergang zwischen den Extremwerten der Geraden und des Punktes. Daher ist der Kreis auch eine Einheit von Punkt und Linie, nämlich von Mittelpunkt und Peripherie.

Der duale Gegensatz von Gerade und Punkt ist in sehr spezieller Weise besonders durch Brianchon und Poncelet in der projektiven Geometrie fruchtbar benutzt worden. Indem wir durch obige mehr philosophische Bemerkung auf die wesentliche Grundlage dieses dualen Gegensatzes hinweisen, fügen wir zugleich die Hinweisung bei, daß im stereometrischen Teil dieses Abschnittes die Dualität zwischen Punkt und Gerade noch in einer anderen, sehr auffälligen Form aufgezeigt werden wird. (Vgl. § 75.)

§ 67. Die Arcusfunktion.

Es ist allgemein bekannt, daß die Formeln der ebenen Trigonometrie als Grenzfälle der Formeln der sphärischen Trigonometrie für unendlichen Radius betrachtet werden können. Zum Beispiel läßt sich der ebene Cosinussatz als Grenzfall des sphärischen Cosinussatzes ableiten. Da jedoch in der ebenen Trigonometrie Strecken vorkommen, während die sphärischen Formeln nur Winkelfunktionen enthalten, findet beim Übergang einer Formel in das andere Gebiet in der Regel eine bedeutende Änderung der Form statt.

Es ist nach allem, was bisher über das Verhältniß von Ebene und Kugeloberfläche gesagt wurde, nicht zu bezweifeln, daß es noch andere trigonometrische Formeln geben muß, die ohne jede Veränderung sowohl plan als sphärisch gültig sind.

Es gibt zwei Wege, um die gesuchten Universalformeln zu erlangen. Entweder man geht von der sphärischen Trigonometrie aus und überlegt, daß jede Strecke ein bestimmter Bruchteil der definiten Maximalstrecke ∞ ist. Da die Strecke $\frac{\infty}{2}$ so viel bedeutet wie der Winkel

von 90° , ist es zulässig, auch den Begriff einer Streckenfunktion $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$, $\cot a$, $\sec a$, $\operatorname{cosec} a$ zu bilden. Der Winkel, welcher einer Strecke a entspricht, wird in der Regel sehr klein sein. Das hindert aber nicht, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie ohne Änderung auch auf die ebene Trigonometrie angewandt werden können.

Diesem ersten Wege zur Gewinnung trigonometrischer Universalformeln läuft ein anderer parallel, der seinerseits von der ebenen Trigonometrie ausgeht. Es ist bekannt, daß man auf irgend einer Kugel das Verhältnis eines Hauptkreisbogens a zum Radius r als den Arcus von a ($\operatorname{arc} a$) bezeichnet. Die Arcusfunktion aber erlaubt die Gewinnung von Universalformeln aus der ebenen Trigonometrie. Nehmen wir als Beispiel den ebenen Cosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$. Diese Gleichung dividiere man durch $r^2 = \left(\frac{\infty}{2}\right)^2$. Dann lautet sie: $\operatorname{arc}^2 a = \operatorname{arc}^2 b + \operatorname{arc}^2 c - 2 \cdot \operatorname{arc} b \cdot \operatorname{arc} c \cdot \cos \alpha$. Diese Gleichung hat nicht nur auf der Ebene, sondern auch auf jeder Kugel Gültigkeit. Der einzige formal ganz belanglose Unterschied ist der, daß für eine Kugel der Radius kleiner als $\frac{\infty}{2}$ ist.

Es ist vielleicht besonders bemerkenswert, daß für gewöhnliche, also im Verhältnis zu $\frac{\infty}{2}$ sehr kleine Strecken der Ebene die Arcusfunktion unendlich kleine Größen darstellt. Die trotzdem ganz zuverlässige Rechnung mit der Arcusfunktion spielt demnach in der Trigonometrie eine ähnliche Rolle wie die Rechnung mit unendlich kleinen Zahlenwerten in der höheren Analysis.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß jeder trigonometrische Zusammenhang auf zwei Weisen durch eine Universalformel darstellbar ist, die sowohl in der Ebene als auf der Kugel ohne Änderung gültig und brauchbar ist. Für den Cosinussatz z. B. lauten die beiden Universalformeln:

1. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$.
2. $\operatorname{arc}^2 a = \operatorname{arc}^2 b + \operatorname{arc}^2 c - 2 \cdot \operatorname{arc} b \cdot \operatorname{arc} c \cdot \cos \alpha$.

Jede dieser Formeln ist sowohl plan als sphärisch verwendbar. Es dürfte sich empfehlen, in Zukunft die beiden Gebiete der Trigonometrie nicht nacheinander, sondern miteinander zu behandeln. Obwohl es sehr erklärlich ist, daß im Lauf der Geschichte zuerst die ebenen Beziehungen und erst verhältnismäßig spät die sphärischen Beziehungen studiert wurden, so ist dies doch kein Grund, das unorganische Nach-

einander von Dingen, die in jeder Hinsicht eng zusammengehören. für alle Zeit beizubehalten. Die Kugeloberfläche ist keine Korrelation zur Ebene, sondern die Ebene ist ein Spezialfall, also eine Subordination der Kugeloberfläche. Der mathematische Unterschied zwischen Kugeloberfläche und Ebene ist nicht größer als der mathematische Unterschied zwischen zwei Kugeloberflächen mit verschiedenem Radius.

§ 68. Das Paradoxon der scheinbaren Linearität einer Gleichung von Kurven zweiten Grades.

In § 27 wurde eine Punktkonstruktion auf Grund der Gleichung

$$\frac{r}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ angegeben. Es ist interessant, daß diese Gleichung, ob-}$$

wohl sie nur Kurven zweiten Grades enthält, dennoch dem Anscheine nach linear ist. Denn auch die Größe r ist eine in der Figur deutlich angebbare Länge. Das Paradoxon klärt sich natürlich dadurch auf, daß die Länge r als Wurzel in der Gleichung vorkommt, d. h. als eine Größe, die trotz ihrer Linearität auf quadratischen Größen beruht.

Es kommt uns hier auch weniger darauf an, das Paradoxon als solches festzustellen, als noch einmal die vier Gleichungen zu rekapitulieren, die zusammen die Kegelschnitte erschöpfend wiedergeben. Von diesen vier Gleichungen sind zwei linear gebaut, während die beiden anderen rein quadratisch sind. Die Symmetrie also ist es, die uns veranlaßt, die formelle Linearität der obengenannten Gleichung zu konstatieren. Und übrigens zeigte der § 27 augenfällig, daß zwischen dieser Gleichung und der Gleichung der Geraden ein enger Zusammenhang besteht. Wir zählen hiermit die vier Gleichungen, welche nach unserer in den vorhergehenden Abschnitten begründeten Ansicht als die Normalgleichungen der Kegelschnitte zu betrachten sind, auf. Wobei zu bemerken ist, daß eine Normalgleichung mit einem Maximum von Beziehungsreichtum ein Minimum von Kompliziertheit vereinigen muß. Die Gleichungen sind:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. & \text{II. } \frac{r}{a} + \frac{y}{b} = 1. \text{ (bezw. } \frac{x}{a} + \frac{r}{b} = 1.) \\ \text{III. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. & \text{IV. } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{array}$$

§ 69. Das reziproke Verhältniß zwischen unendlichem Radius und unendlicher Peripherie.

Angenommen ein Kreis habe seinen Radius so stark vergrößert, daß seine Peripherie zur Geraden geworden ist. Dann geht offenbar der Radius $\frac{\infty}{2}$ in der Peripherie 2∞ vier mal auf.

Es ist ferner klar, daß jedes Viertel der Peripherie zum Radius gemacht werden kann, bezüglich dessen der frühere Radius ein Viertel der Peripherie wird. Das Verhältniß zwischen Radius und Peripherie wird also im unendlichen Bezirk umkehrbar. Jede Länge $\frac{\infty}{2}$ kann sowohl als Radius wie als Viertel einer Peripherie aufgefaßt werden.

Im endlichen Bezirk gilt bekanntlich ein anderes Gesetz. Hier wird das Verhältniß zwischen Radius und Peripherie durch die Irrationalzahl π determiniert.

Im unendlichen Bezirk ist gleichsam $\pi = 2$ geworden. Hier läßt sich auch der Radius nicht sechsmal in der Peripherie abtragen, sondern nur viermal. Hier fällt jeder Unterschied von Sehne und Peripherie fort.

Es wäre sehr kurzsichtig, wollte man diese neuen Gesetze des unendlichen Bezirks als Argumente gegen die Polargeometrie ins Feld führen. Man muß im Gegenteil anerkennen, daß sie auf dem sicheren Fundament der Polargeometrie wie neuentdeckte Tatsachen bewertet werden müssen, die den alten in keiner Weise widersprechen, weil sie auf einem ganz neuen Gebiet liegen. In dem Augenblick, wo der Unterschied zwischen Peripherie, Tangente und Sehne eines Kreises gleich null wird, ändern sich plötzlich in gesetzmäßiger Weise alle Beziehungen, welche die Elementargeometrie auf Grund der ausdrücklichen Verschiedenheit dieser drei Linien abgeleitet hat. Also vor allem ändert sich die Zahl π . Das reziproke Verhältniß zwischen Radius und Peripherie ist eine der bewundernswertesten Vollkommenheiten der Geometrie des Unendlichen. Wenn man beachtet, daß dadurch zwischen Radius und Peripherie eine umkehrbare Polarität festgesetzt wird, kann man ihre Übereinstimmung mit dem Grundgesetz aller Naturlogik nicht in Zweifel ziehen.

B. Stereometrischer Teil.

§ 70. Kegel und Zylinder.

Da sich je zwei Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden, auch in einem zweiten Punkte schneiden, der vom ersten die Entfernung ∞ besitzt, besteht für einen Kegel in seinem Verlauf durch das Unendliche folgendes Gesetz. Seine Seitenlinien divergieren vom Scheitel bis zur Entfernung $\frac{\infty}{2}$. Dort sind sie parallel, d. h. dort ist der Kegel ein Zylinder. Von hier ab konvergieren die Seitenlinien wieder, bis sie nach abermals $\frac{\infty}{2}$ sich in einem zweiten Scheitel schneiden. Vom zweiten Scheitel geht es in derselben Richtung und nach demselben Gesetze wieder zum ersten Scheitel zurück. Jeder Kegel bildet demnach einen Kreislauf mit zwei Scheiteln und zwei Zylinderphasen. Er läuft in sich selbst zurück, was übrigens schon durch die bereits erörterten Eigenschaften der Kegelschnitte vollkommen ausgemacht ist.

Der Gegensatz von Kegel und Zylinder ist wie der Gegensatz paralleler und nichtparalleler Geraden einer Ebene bloß graduell, nicht wesentlich. Ein Zylinder ist ein Kegel, dessen Scheitel in der Entfernung $\frac{\infty}{2}$ liegt. Jeder Kegel wird in der Entfernung $\frac{\infty}{2}$ von seinem Scheitel zum Zylinder, und jeder Zylinder hat in der Entfernung $\frac{\infty}{2}$ von seiner genauen Parallelitätsstelle einen Scheitel. Kegel und Zylinder sind nicht verschiedene Körper, sondern verschiedene Phasen ein und desselben Körpers in seinem Verlauf durch das Unendliche. Nur der Standpunkt des Beobachters entscheidet, ob ein Körper Kegel oder Zylinder genannt werden soll. Berücksichtigt man den Totalverlauf dieses Körpers durch das Unendliche, so ist er zweimal ein Zylinder und zweimal ein Kegel mit sichtbarer Spitze. Zwischen diesen vier Hauptstellen ist der Körper ein Kegel ohne sichtbare Spitze, d. h. ein Kegelstumpf.

Der Durchmesser des Zylinders steht mit dem Winkel des ihm entsprechenden Kegels in der durch § 12 und § 47 begründeten Beziehung: $\frac{d}{\infty} = \frac{w}{180^\circ}$. Diese Gleichung gilt übrigens, wie hier nachgetragen sei, für das Verhältnis von Abstand und Winkel zweier

Geraden einer Ebene ganz allgemein. Ist der Abstand zweier Parallelen bekannt, so ist die Größe ihres Schnittwinkels durch obige Gleichung fest bestimmt. Ist umgekehrt der Schnittwinkel zweier Geraden bekannt, so findet man durch obige Gleichung den Abstand der Geraden an ihrer Parallelitätsstelle. Vergrößert sich der Abstand zweier parallelen Geraden, so ändert sich die Lage ihrer Schnittpunkte nicht, wohl aber ändert sich ihr Schnittwinkel. Der Abstand der Schnittpunkte zweier Geraden ist ja in keiner Weise willkürlich beeinflussbar, sondern beträgt stets die Naturkonstante ∞ .

Diese Angaben mögen an dieser Stelle als Rekapitulation nützlich sein. Denn es ist dringend nötig, daß man sich das Grundgesetz der Polargeometrie nach allen Seiten so deutlich macht, daß es jedem Leser in seiner ganzen Klarheit stets gegenwärtig sei.

§ 71. Die Zylinderschnitte.

Es folgt aus dem Vorhergehenden, daß Zylinderschnitte nichts anderes sind als Kegelschnitte, die man von einem um $\frac{\infty}{2}$ vom Scheitel entfernten Standpunkt betrachtet. Der interessanteste Zylinderschnitt ist die bisher noch nicht beachtete Parallelhyperbel.

Sie hat die Gleichung $\left(\frac{x}{\frac{\infty}{2}}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Man erhält sie aus der

gewöhnlichen Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, indem man unter Beibehaltung eines Hyperbelpoles und der zugehörigen Scheiteltangenten b den Nullpunkt des Achsensystems in die Entfernung $\frac{\infty}{2}$ schwinden läßt. Die Äste der so entstehenden Hyperbel sind einander im Punkte der Betrachtung parallel.

§ 72. Das räumliche Strahlenbüschel.

Man nehme im Raum einen Punkt P an und lege durch ihn ein vollständiges Strahlenbüschel. Die Strahlen dieses Büschels divergieren dann, wie nachgewiesen, bis zur Entfernung $\frac{\infty}{2}$ von P . Dort sind sie parallel. Von da ab konvergieren sie wieder und bilden in der Entfernung ∞ von P einen zweiten Schnittpunkt P' . Von P'

geht es in gleicher Richtung geradlinig wieder nach P zurück, und zwar auch diesmal über eine Parallelitätsstelle der Strahlen. Auch das Strahlenbüschel durchläuft also die Unendlichkeit in vier Quadranten. Wie die Ebene, so ist auch der Raum allseitig in sich selbst geschlossen.

Man kann natürlich nicht aus dem Raum nach irgend einer Seite entweichen. Diese Vorstellung wäre völlig unzutreffend. Denn der Raum gestattet innerhalb seiner nach allen Richtungen eine ungehinderte, schrankenlose, geradlinige Bewegung, was ja am besten durch den Begriff des Strahlenbüschels selbst erläutert wird. Der Raum läuft geradlinig in sich selbst zurück, ist aber in keiner Weise begrenzt.

An der Stelle, an welcher das Büschel parallele Strahlen hat, determiniert es in beiden Malen eine Ebenenhälfte, welche beiden Ebenenhälften sich zu einer Totalebene zusammenschließen. Jeder durch einen Scheitelpunkt P gesetzte Raum determiniert also sowohl einen Gegenseitel P' als auch eine Totalebene, welche den Raum als Äquatorebene durchschneidet. Und jede Totalebene determiniert nach demselben Gesetz zu ihren beiden Seiten je einen Pol, welcher den Raum, zu welchem die Totalebene äquatorial verläuft, eindeutig festsetzt.

§ 73. Der Begriff des Raumes.

Wie schon in § 26 zum Ausdruck gebracht wurde, ist der Raum der Polargeometrie nicht amorph wie derjenige der euklidischen Geometrie, sondern er hat eine kristallographische Struktur. Man kann ihn daher nicht nur in seinen Gesetzen bis ins Einzelne analysieren, sondern man kann ihn auch mit vorteilhafter Exaktheit klar definieren. Ein Raum ist nach der Polargeometrie ein dreidimensionales (vgl. § 11 Def. III und VII) Ordnungsprinzip, das durch einen Polpunkt P genauestens angegeben ist. Durch P ist ganz von selbst auch P' und die Äquatorebene determiniert.

Ein Raum ist fest, wenn der Punkt P fest ist. Ein Raum ist bewegt, wenn der Punkt P bewegt ist. Der Raum steht also in der Polargeometrie nicht mehr außerhalb aller Gepflogenheiten der übrigen geometrischen Gebilde, sondern er ist genau wie Gerade und Ebene entweder fest oder bewegt. Diese Einordnung des Raumes in die geometrische Sitte dürfte ein beachtenswerter methodischer Vorzug der Polargeometrie sein.

§ 74. Ein Gesetz der Raumbewegung.

Bewegt sich ein Raum mit den Polen P und P' auf einer Geraden g , so dreht sich seine Äquatorebene um eine Achse. Und zwar ist diese Achse der Ebenenäquator zwischen denjenigen beiden Punkten, in denen die Gerade g die Äquatorebene in einer beliebigen Anfangsstellung schneidet.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Überlegung, daß die Distanz zwischen Pol und Äquatorgebilde stets $\frac{\infty}{2}$ beträgt und daß die Äquatorebene immer auf der parallelen Region des Raumbüschels senkrecht steht.

Es ist von Interesse, sich hier zu erinnern, daß die projektive Geometrie der Ebene einen ähnlichen, ebenso eleganten Satz enthält. Er gehört der Lehre von der Kreispolarität an und lautet: Bewegt sich ein Punkt P auf einer Geraden g , so dreht sich seine Polare um einen Punkt, welcher der Pol dieser Geraden ist.

§ 75. Die Zwillingssgeraden.

Man nehme eine Ebene, deren beide Pole und die zu diesen Polen gehörige Äquatorgerade. Dann sind nach § 32 die Pole die Mittelpunkte der Äquatorgeraden auf der Ebene. Man drehe nun die Ebene um die Äquatorgerade. Dann bewegen sich die beiden Pole auf einer Geraden, welche auf der Ursprungsstellung der Ebene senkrecht steht, durch den Raum. Die letztere Gerade enthält also lauter Mittelpunkte der ersteren, nämlich für jede durch die erstere gelegte Ebene ein Paar.

Der Kürze wegen heiße die erste Gerade g_1 , die zweite g_2 . Dann ist jeder Punkt von g_2 Mittelpunkt von g_1 . Es ist aber auch jeder Punkt von g_1 Mittelpunkt von g_2 . Es gibt also in einem Raum zu jeder Geraden eine zugeordnete Gerade derart, daß jeder Punkt jeder von beiden Geraden Mittelpunkt der anderen Geraden ist. Jeder Punkt jeder der beiden Geraden hat von jedem Punkt der anderen Geraden den Abstand $\frac{\infty}{2}$.

Solche Geraden eines Raumes, welche diese gegenseitigen Eigenschaften besitzen, nenne ich Zwillingssgeraden. Zu jeder Geraden eines Raumes existiert in demselben Raum eine und nur eine Zwillingssgerade. Die sämtlichen Punkte der beiden Geraden haben voneinander

den Abstand des Naturmaximums $\frac{\infty}{2}$. Der Beweis dafür ergibt sich aus obiger Ableitung.

Zwillingsgeraden sind die einzigen überhaupt existierenden Geraden, welche konstanten Abstand voneinander haben. Sie stellen gleichsam eine späte Erfüllung dessen dar, was man in unmöglicher Weise von den Parallelen glaubte hoffen zu sollen. Geraden derselben Ebene können nicht konstanten Abstand voneinander halten. Geraden eines Raumes können dies in dem einen, ausnahmsweisen Falle, daß der konstante Abstand $\frac{\infty}{2}$ betragen soll. Dann sind es Zwillingsgeraden.

§ 76. Windschiefe Geraden eines Raumes.

Legt man irgend zwei Geraden in einen Raum, so werden sie in der Regel weder ein und derselben Ebene angehören, noch werden sie Zwillingsgeraden sein. Sondern der reguläre Fall ist der, wo die Geraden, wie man sich in der Stereometrie ausdrückt, windschief verlaufen. Um zu erkennen, was diese Bezeichnung besagt, wolle man zwei geradlinige Stäbe in unregelmäßiger Weise in den Raum halten und ihr gegenseitiges Verhältnis beachten.

Windschiefe Geraden schneiden sich überhaupt nicht. Sie werden durch folgende Definition bestimmt: Windschiefe Geraden sind solche Geraden eines Raumes, bei denen die Verbindungsgeraden je zweier nebeneinanderliegender Punkte ungleiche Länge haben, ohne daß die Geraden derselben Ebene angehören. Oder eine andere Definition: Windschiefe Geraden sind Geraden, die weder in derselben Ebene verlaufen, noch Zwillingsgeraden sind.

Jedes Paar windschiefer Geraden hat zwei Stellen der Maximalentfernung und zwei Stellen der Minimalentfernung. Diese vier Stellen liegen jeweils $\frac{\infty}{2}$ auseinander, und zwar so, daß Maximal- und Minimalentfernung abwechseln. Sind zwei windschiefe Geraden im Raum wirklich gegeben, so überblickt man gewöhnlich eine Minimalstelle, von welcher aus die Abstände nebeneinanderliegender Punkte immer größer werden. Dies kann man sich an den beiden ebengenannten Stäben klar machen.

Wenn im planimetrischen Teil gelegentlich der Parallelen-diskussion hie und da gesagt wurde, daß es nichtschneidende Geraden