

befindet. Man kann sich denken, daß ein Auge den Punkt bei seiner Bewegung aufmerksam verfolgt. Dieses Auge wird sich zwar schließlich sehr schnell und sehr weit bewegen müssen, aber es wird niemals das Wunder erleben, daß der Punkt vor seinem Blick in Rauch aufgeht und zu Nichts wird. Der reelle Mittelpunkt bleibt reeller Mittelpunkt seiner Kurve, wie sehr auch die letztere sich abflachen möge. Daraus folgt mit vollkommener Schärfe, daß auch die Gerade auf der Ebene einen Mittelpunkt hat, oder vielmehr zwei Mittelpunkte, da nach Fig. 1 jede Gerade der Grenzwert zweier entgegengesetzt verlaufenden Kreisscharen ist.

Jede Gerade einer Ebene hat also auf jeder von beiden Seiten einen Mittelpunkt. Diese Punkte sind, nach § 12 und nach dem Satz, daß die Tangente auf dem Radius senkrecht steht, die beiden Schnittpunkte der auf der Geraden errichteten Lote. Sie haben nach § 19 einen Abstand von je $\frac{\infty}{2}$ von der Geraden. Einen stereometrischen Satz über die Mittelpunkte von Geraden werden die Folgerungen ableiten. (§ 75.)

§ 33. Eine auffällige Weg-Zeitgleichung.

Es sei gegeben der rechte Winkel ASR und die Parallele AU zu SR. Man denke sich den rechten Winkel in zwei Hälften zerteilt, dessen linke Hälfte wieder in zwei Hälften, deren linker Winkel sei wieder in zwei Hälften geteilt, und so fort bis zu unendlicher Annäherung und schließlich Erreichung des freien Schenkels SR. Man denke sich nun diese fortgesetzte Hälftung in gleichen Zeitabständen durchgeführt, zum Beispiel von Sekunde zu Sekunde. Dann besteht zwischen dem Weg auf der Vertikalen AU und der Zeit folgende Gleichung:

$$s_t = a \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ \cdot \sum_{n=1}^{n=t} \frac{1}{2^n} \right)$$

Darin bedeutet s_t den Weg s auf AU von A gerechnet nach der Zeit t . a ist der Abstand AS, d. h. der Weg in der Zeiteinheit 1. Was diese Gleichung aussagt, kann man sich sehr anschaulich klar machen, indem man die Winkelteilung in gleichen Zeitabständen kinematographisch vorstellt, während gleichzeitig von A aus ein

Körper herunterfällt, der sich in jedem Zeitpunkt an dem durch die Gleichung bestimmten Ort befindet.

Wenn der bewegliche Schenkel des Winkels die Grenze SR erreicht hat, befindet sich der fallende

Körper in der Entfernung $\frac{\infty}{2}$, wie

groß auch die Einheitsstrecke a gewählt war. Diese Gleichung hat eine besondere physikalische Bedeutung, nämlich in der Lehre der empirischen Fallgesetze. Der

Grenzpunkt $\frac{\infty}{2}$ entspricht dem Erd-

mittelpunkt. Induktiv-empirische Versuche sollen an andern Ort besprochen werden.

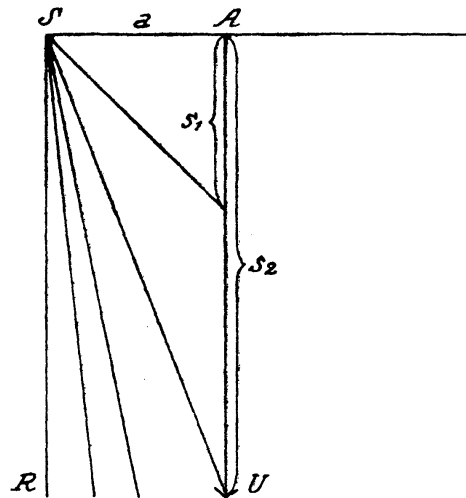


Fig. 15.

§ 34. Beseitigung eines durch die Vorstellungstendenz veranlaßten Hindernisses.

Es pflegt Schwierigkeiten zu machen, die Insiehgeschlossenheit der Geraden anzuerkennen, da man sich diese Eigenschaft einer Linie vermöge einer Krümmung vorzustellen gewohnt ist. Eine gekrümmte Linie ist aber keine Gerade. Da sich nun die Insiehgeschlossenheit einer Geraden an ihr selbst nicht vorstellen läßt, ist dies für manche Beurteiler ein Grund, der Geraden die Eigenschaft der Insiehgeschlossenheit überhaupt abzusprechen.

Abgesehen davon, daß es nicht angeht, auf Grund eines subjektiven Gefühls objektiv bewiesene Eigenschaften einer Linie abzuleugnen, läßt sich die Insiehgeschlossenheit der Geraden mit einem berechtigten Vorstellungsbestreber tatsächlich auch versöhnen, und zwar durch folgende Überlegungen:

1. Der Übergang zwischen Kreis und Gerade kommt in der Erfahrung vor, ist also vorstellbar.
2. Die Insiehgeschlossenheit eines Kreises, also des nachgewiesenen Ebenbildes der Geraden, ist ebenfalls vorstellbar.
3. Unter diesen Umständen wird man sich der Einsicht nicht verschließen, daß die Unvorstellbarkeit der Insiehgeschlossenheit

der Geraden selbst auf der Eigenart unseres optischen Vermögens beruht, die Dinge immer nur bis zu einem gewissen Horizonte verfolgen zu können.

4. Die Gerade besteht übrigens, wie in § 21 erwähnt ist, aus zwei logisch gegeneinander selbständigen Hälften, deren jede bequem als Gerade vorgestellt werden kann.

5. Auch die Oberfläche einer undurchsichtigen Kugel kann nicht simultan überblickt werden.

6. In den Folgerungen wird durch die „Lambertsche Münze“ ein Hilfsmittel geschaffen werden, welches gestattet, die ganze Unendlichkeit der Ebene, also auch der Geraden, in höchst anschaulicher Weise ohne Krümmung vollständig mathematisch abzubilden.

Aus diesen Erwägungen dürfte hervorgehen, daß die Vorstellungstendenz unseres Bewußtseins, die als ein Element der Klarheit stets in möglichster Weise respektiert werden soll, gegen die bewiesenen Eigenschaften der Geraden kein unüberwindliches Hindernis abgeben kann.

§ 35. Beseitigung eines analytischen Einwandes.

Wenn zwei Geraden sich in zwei Punkten auf der Ebene schneiden, sollte man glauben, daß dadurch der völlig sichere Unterschied von Kurven ersten und zweiten Grades zerstört werde. Das wäre sehr schlimm. Geraden haben Gleichungen ersten Grades und müssen sich in der Anzahl ihrer gegenseitigen Schnittpunkte von allen andern Kegelschnitten, welche Gleichungen zweiten Grades besitzen, unterscheiden.

Die Lösung dieses gefährlich aussehenden Zwiespaltes zwischen Geometrie und Analytik hat schon Gudermann im Jahre 1830 vorbereitet, und wir brauchen nur der Spur zu folgen, die er am Ende des „Vorberichtes“ seiner „Analytischen Sphärik“ niedergelegt hat. Dieser Mathematiker ist bestrebt, die Geometrie auf der Kugel an die Geometrie auf der Ebene, so weit er es für möglich hält, anzugleichen. Um diesem Zwecke zu dienen, setzt er fest, daß je zwei Hauptkreise einer Kugel, die er im Gegensatz zu den sphärischen Nebenkreisen als „Sphärische Geraden“ bezeichnet, nur einen ein-

zigen Schnittpunkt haben sollen. Er teilt also die Kugeloberfläche in zwei gegeneinander selbständige Hälften und bezieht die Gleichungen nur auf eine Kugelhälfte.

Unsere Überlegung in den vorhergehenden Paragraphen hat schon von selbst darauf geführt, daß auch die Ebene als aus zwei selbständigen Hälften bestehend aufgefaßt werden muß. Tut man aber dies, so ist der Unterschied zwischen Kurven ersten und zweiten Grades auf das beste stabilisiert. Die analytischen Gleichungen gelten stets nur für eine Ebenenhälfte. Auf dieser aber haben in der Tat zwei Geraden nur einen einzigen Schnittpunkt, während zwei Kreise deren zwei besitzen. Durch die logische Zweiteilung der Ebene, welche eines der wesentlichsten Merkmale der Polargeometrie ist, wird die scheinbare analytische Schwierigkeit restlos beseitigt.

§ 36. Beseitigung eines Einwandes der projektiven Geometrie.

Wenn die Ebene wie eine Kugeloberfläche in sich selbst geschlossen ist, so muß auch die projektive Geometrie zunächst den Einwand erheben, daß die durch sie längst bewährte Anzahl der Schnittpunkte zwischen Geraden nicht plötzlich vermehrt werden kann. Eine geometrische Reform, durch welche die begründetsten Wahrheiten ins Wanken kommen sollten, wäre natürlich ein sehr bedenklicher Vorschlag.

Doch die Polargeometrie hat weder die Absicht noch das Vermögen, redliche Sachverhalte zu stören. Sondern sie geht lediglich darauf aus, die soliden Inhalte der Geometrie von Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit zu befreien. Was aber die projektive Geometrie betrifft, so ist sie derjenige Teil der Geometrie, der den objektiven Zusammenhängen am meisten gerecht wird. Daher ist von vornherein zu vermuten, daß die Polargeometrie sich nur zum Schein von ihr unterscheidet.

Der Schein aber wird durch die einfache Tatsache verursacht, daß auch die projektiven Schnittpunkte nur auf einer Hälfte der Ebene gezählt werden, während die Polargeometrie beide Hälften der Ebene in Betracht zieht. Auch in diesem Falle wird also der Einwand durch die Erkenntnis von der Zweiteilung der Ebene beseitigt.

§ 37. Das Gesetz von der Erhaltung der geometrischen Elemente.

An verschiedenen Stellen, besonders in den §§ 13, 18, 19, 21, 23, mußten wir auf die Notwendigkeit hinweisen, daß ein geometrischer Punkt durch bloße Fortbewegung seiner selbst auf der Ebene nicht plötzlich zu Nichts werden kann, sondern sich in jedem Moment seiner Bewegung als bestimmter Punkt an einem bestimmten Orte der Ebene befindet.

Dieses Postulat, daß mathematische Elemente durch bloße Bewegung ihrer selbst nicht zerstört werden können, ist so grundlegend wie allgemeinverbindlich. Es spielt in der Geometrie genau die gleiche Rolle wie das „Gesetz von der Erhaltung der Materie“ in der Chemie und das „Gesetz von der Erhaltung der Energie“ in der Physik. Diese drei Gesetze haben gleicherweise zum Inhalt, daß durch bloße Umformung oder Bewegung kein Element der Wirklichkeit in seiner Existenz beeinträchtigt wird, sondern daß jedes Element die Existenz, die es einmal besitzt, unter jeder Form und unter jedem Bewegungszustand beibehält. In allgemeiner Fassung lauten diese drei Gesetze: „Kein Element, dessen Existenz vom Bewußtsein vorausgesetzt wird, kann durch seine Schicksale innerhalb der Existenz seine Existenz verlieren.“¹⁾

Indem wir das „Gesetz von der Erhaltung der geometrischen Elemente“ als geometrisches Grundgesetz den soeben erwähnten chemischen und physikalischen Grundgesetzen an die Seite stellen, glauben wir der Polargeometrie eine ganz besondere Empfehlung mitzugeben. Denn die Polargeometrie unterscheidet sich z. B. von der euklidischen Geometrie gerade dadurch, daß sie das Gesetz stets berücksichtigt und niemals fahrlässig außer Acht läßt. In der euklidischen Geometrie geschehen Wunder — nämlich plötzliche Zerstörungen von sich bewegenden Punkten. In der Polargeometrie sind solche Wunder ausgeschlossen, wodurch sich eben diese Geometrie als die kritische erweist.

¹⁾ Dieses Gesetz unterscheidet die Wirklichkeit vom Traum. Im Traum zerrinnen einem die Dinge in den Händen. Die euklidische Geometrie enthält noch einen Traumbestandteil: das ist die neue Erkenntnis dieses Buches.

§ 38. Die In sich geschlossenheit von Gerade, Ebene und Raum.

Da der Beweis geliefert ist, daß Geraden wie Kugelhauptkreise in sich selbst zurücklaufen, so ist die Eigenschaft der In sich geschlossenheit auch für Ebene und Raum ausgemacht. Denn Ebene und Raum werden in jeder Richtung von Geraden durchmessen, und die Eigenschaft der Geraden entscheidet also auch über die Eigenschaft der Ebene und des Raumes. Man hat somit das Resultat festzuhalten, daß Gerade, Ebene und Raum nicht endlos sind, sondern in sich selbst zurücklaufen.

Zwei sich im Blickfeld unserer Betrachtung schneidende Geraden einer Ebene divergieren nicht bis ins Endlose von einander, sondern sie beginnen an einer gewissen Kulminationsstelle wieder gegeneinander zu konvergieren. Man kann daher die Theorie der Polargeometrie im Gegensatz zur Endlosigkeitstheorie auch als Kulminationstheorie bezeichnen.

§ 39. Die mathematische Fruchtbarkeit der Polargeometrie.

Der Wert einer mathematischen Neuerung bemißt sich nicht zuletzt auch nach der Auswertbarkeit ihrer Thesen im einzelnen. In dieser Hinsicht befindet sich die Polargeometrie in günstiger Lage. Es ist wirklich überraschend, welche Fülle von neuen, einleuchtenden Beziehungen, von denen man auf euklidischem Standpunkt nichts ahnen konnte, durch sie geschaffen werden. Da der zweite Teil des Buches diesen mathematischen Folgerungen gewidmet ist, braucht hier nicht näher darüber gesprochen zu werden. Es sei jedoch betont, daß die große Plastik der Lehrsätze auch für die Region des Unendlichen sowie die allgemeine Durchführung des Dualitätsgedankens dieser Geometrie eine Schönheit verleihen, die man anderwärts vergebens sucht. Während in der euklidischen Geometrie das Unendliche eine problematische Nebelsphäre ist, über welche man nur unsichere und widersprechende Gerüchte vernimmt, hat die Polargeometrie erkannt, daß das Unendliche eine ebenso wirkliche und ebenso genau erkundbare Sphäre ist wie das Endliche, da das Endliche und das Unendliche sich nicht durch objektive Eigenschaften, sondern nur durch den zufälligen Standpunkt des Beobachters unterscheiden.

§ 40. Die raumtheoretisch-astronomische Fruchtbarkeit der Polargeometrie.

Auch in raumtheoretisch-astronomischer Hinsicht sind die Folgerungen der Polargeometrie sehr reizvoll. Durch sie wird z. B. als Wirklichkeit erwiesen, was der Astronom Prof. Dr. K. Schwarzschild als wahrscheinlich hinstellte: daß nämlich der Raum nicht endlos ist, sondern in sich selbst zurückläuft. Hier sei zum Abschluß eine Stelle aus Schwarzschilds Buch „Über das System der Fixsterne“ (Leipzig 1909) wiedergegeben:

„Es gab eine Zeit, wo es wunderbar erschien, daß man beim Geradeausgehen auf der Erde wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Es könnte sein, daß zukünftige Geschlechter dasselbe Wunder in einem noch höheren Maße erlebten, wenn es sich herausstellte, daß, wenn man von der Erde weg weiter und weiter in den Raum hinausgeht, man schließlich wieder zu demselben Ausgangspunkt zurückkommt. Was sich durch die Erdumseglung Magelhäens in zwei Dimensionen ereignete, das würde sich hier in drei Dimensionen wiederholen. So wie die Erde eine endliche Oberfläche hat, von der jetzt nur noch geringe Fleckchen unbesucht sind, so würde der Raum einen endlichen Inhalt haben, den wir ebenfalls ausforschen könnten.“

Die Polargeometrie hat diese Folgerung.

II. Mathematische Folgerungen.

A. Planimetrischer Teil.

§ 41. Der definite Unendlichkeitsbegriff der objektiven Geometrie.

Schon J. H. Lambert hat in seiner „Theorie der Parallel-
linien“ 1786 betont, daß die Geometrie, die von uns als objektive vertreten wird, sich von allen anderen logisch möglichen Geometrien besonders auch in Hinsicht auf den Unendlichkeitsbegriff wesentlich unterscheidet. Während für die Standpunkte, welche nichtschneidende Geraden einer Ebene anerkennen, der Begriff unendlich im geometrischen Sinne (vgl. § 11 Def. XI) so viel wie endlos bedeutet — welche Bedeutung man nur noch einer besseren mathematischen Formulierung unterwerfen kann —, ist für die objektive Geometrie die Länge

„unendlich“ eine definite Strecke. Die Länge ∞ ist für den letzteren Standpunkt eine Naturkonstante, die ein objektiv feststehendes Längenmaximum bezeichnet. Auch Lambert hat diese Möglichkeit als sehr verlockend beurteilt, und man wird in der Tat nicht umhin können, ihr in der Polargeometrie mit besonderer Befriedigung zu begegnen.

§ 42. Der indefinite Unendlichkeitsbegriff der euklidischen Geometrie.

Die Geometrie kann auf allen Gebieten als eine Wissenschaft von Bestimmtem charakterisiert werden. Ein unbestimmter Inhalt widerspricht geradezu dem exakten Wesen der Geometrie. Wenn zwei Geometrien möglich sind, von denen die eine einen indefiniten Begriff enthält, und die andere nicht, so wird man selbst in dem Falle, daß sie beide sonst gleich empfehlenswert sind, der letzteren als der rationaleren bestimmt den Vorzug zu geben haben. Die euklidische Geometrie hat aber den Nachteil, der soeben erwähnt wurde: sie enthält einen indefiniten Begriff, nämlich ihren Unendlichkeitsbegriff.

Daß die indefinite Unendlichkeit, die man auf euklidischem Standpunkt anzunehmen genötigt ist, in ihrer indefiniten Naturhaftigkeit in der Mathematik eigentlich recht unerwünscht ist, zeigt sich schon in dem Bestreben, durch eine passende Definition wenigstens eine definite Form dieses Begriffes zu ermöglichen. Die gebräuchliche Definition des Unendlichen im indefiniten Sinne macht nämlich das Unendliche zu einem Wert, der immer noch größer ist als jeder noch so hohe angebbare, d. h. definite Wert.

Durch diese Definition ist offenbar der Versuch gemacht, die gänzlich indefinite Natur des Begriffes Unendlich einigermaßen in definite Form zu kleiden. Man gibt die Anleitung, möglichst große definite Werte anzunehmen und die Größe Unendlich dann immer noch größer zu setzen.

Wie aner kennenswert auch dieses Bestreben ist, dem leider indefiniten Begriff wenigstens den Schein von etwas Definitem zu geben, so kann es doch die dem Begriffe von Natur aus anhaftenden Mängel nicht tilgen. Auch im Kleide dieser Definition zeigt der Begriff seine eigentlich vernunftwidrige Natur. Das Bewußtsein, das nach immer höheren Werten greifen soll, ohne das Ziel seines Strebens erreichen,

ja ohne sich ihm auch nur annähern zu können, wird von diesem mathematischen Begriff, wenn der Ausdruck gestattet sein soll, gleichsam zum Narren gehalten.

Nun kann es keinem Zweifel unterliegen, daß es eine Sanierung der Geometrie bedeutet, wenn sie auf irgend eine einwandfreie Weise von derart beleidigenden Begriffen befreit wird. Diese Sanierung geschieht durch die Polargeometrie.

§ 43. Dührings Analyse des Unendlichkeitsbegriffes.

Eugen Dühring, der sich ebenfalls auf den Boden des euklidischen Unendlichkeitsbegriffes stellt, hat versucht, denselben innerhalb dieses Standpunktes zu sanieren. Er setzt fest, daß man streng zu unterscheiden habe zwischen dem indefinit Endlosen, welches er mit dem Zeichen II benennt, und den sehr großen approximativen, definiten Werten, für welche allein er das Zeichen ∞ reserviert sehen möchte. Diesem Standpunkt gegenüber seien folgende Bemerkungen gestattet:

1. Im Grunde genommen unterscheidet sich diese Ansicht von der im § 42 mitgeteilten gebräuchlichen Auffassung nur dadurch, daß sie die indefinite Endlosigkeit als mathematisch nicht in Betracht kommend darstellt und den definiten Approximationswerten, die sie als ∞ bezeichnen zu sollen glaubt, alle mathematische Bedeutung zuweist. Aus diesem Verfahren spricht zweifellos der Wunsch, die indefinite Endlosigkeit aus der Mathematik zu entfernen. Daß dies jedoch auf solche Weise nicht möglich sein dürfte, zeige das Folgende.

2. Die Größe Unendlich im geometrischen Sinne ist durch das Verhalten von Parallelen definiert. "Es widerspricht den geometrischen Anforderungen, sie anders zu definieren, als dies in § 11 Def. XI geschehen ist. Was man auch über die Länge Unendlich denken mag, sicher ist soviel, daß sie eine vom Menschen unabhängige objektive Bedeutung hat. Nimmt man nun zwar keine Parallelenschnittpunkte an, definiert aber das mathematisch Unendliche trotzdem als etwas Definites, nämlich als irgend einen definiten Approximationswert an das Unerreichbare, so macht man das Unendliche zu etwas, das es in der Mathematik nicht ist.

3. Beim Unendlichgroßen ist eine Approximation an das Endlose übrigens eine *Contradictio in adjecto*. Beim Unendlichkleinen allein findet eine scheinbare Approximation an den Grenzwert statt.

Die Tatsache, daß Dühring sein Hauptaugenmerk ursprünglich auf das letztere richtete, mag seine Definition des Unendlichen als Approximation erklären.

Zusammenfassend wäre zu sagen, daß in der Dühringschen Auffassung zwar der Wille zum Definiten sympathisch berührt, daß aber sein Vorschlag, die Größe ∞ als definite Approximationsgröße aufzufassen, hinter dem allgemein gebräuchlichen Modus, die als indefinit betrachtete Größe ∞ notgedrungen durch definite Unterschiebungen zu ersetzen, an Wert zurücksteht, weil jene Auffassung des geometrisch Unendlichen dasselbe zu einer unobjektiven, willkürlichen Nummer machen würde. Der definite Unendlichkeitsbegriff, den Dühring für wünschenswert zu halten scheint, kann auf keine andere Weise erlangt werden als durch die Anerkennung reeller Parallelschnittpunkte — also durch die Annahme einer gewissen nichteuklidischen Geometrie. Übrigens läßt sich über „die nichteuklidischen Geometrien“ nicht in Bausch und Bogen urteilen. Denn die eine Hälfte, nämlich diejenige von Lobatschewsky und Bolyai, ist falsch, während die andere Hälfte, nämlich diejenige von Riemann und Helmholtz, einzig richtig ist.

§ 44. Dührings Gesetz der bestimmten Anzahl.

Dühring betont in der „Wirklichkeitsphilosophie“ die logische Notwendigkeit, daß alles Zählbare eine bestimmte Anzahl haben muß. Der Begriff einer Anzahl bedeutet eo ipso stets eine bestimmte Anzahl. Aus diesem kühnen, aber unzweifelhaften Gesetz schließt Dühring, wie scheint mit Recht, auf die endliche Anzahl der Himmelskörper. Es lassen sich aber aus dem Gesetz noch andere Schlüsse ziehen, z. B. der folgende:

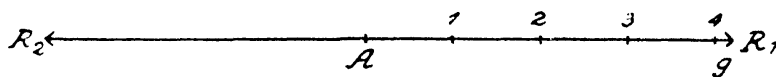


Fig. 16.

Sei g eine Gerade und A auf derselben ein Ausgangspunkt für einen Fußgänger, der in bestimmt zählbaren Schritten 1, 2, 3, ... in Richtung R_1 vorwärtsschreitet. Es fragt sich nun, wieviel Schritte nötig sind, um, was die Mathematik als möglich annehmen muß,

aus Richtung R_2 wieder an den Ausgangspunkt A zurückzugelangen. Zwei Fälle sind dabei denkbar.

1. Der Fußgänger hat endlos viele Schritte nötig.

2. Der Fußgänger hat eine definite Anzahl von Schritten nötig.

Bestände der erste Fall zu Recht, so wäre, ganz abgesehen von den bereits behandelten geometrischen Unzuträglichkeiten, auch das Gesetz der bestimmten Anzahl durchbrochen. Denn es gäbe in der Welt des Denkens eine Reihe von bestimmt zählbaren Einheiten ohne definite Anzahl. Besteht aber der zweite Fall zu Recht, was in der Polar-geometrie unbezweifelbar ist, so wird auch dem Gesetz der bestimmten Anzahl genügt.

§ 45. Der algebraische Unendlichkeitsbegriff.

Eine Hauptursache dafür, daß der indefinite Unendlichkeitsbegriff sich in der Geometrie trotz seiner Bedenklichkeit fraglos zur Anerkennung gebracht hat, ist die Tatsache, daß der algebraische Unendlichkeitsbegriff wirklich indefinit ist, und zwar in notwendiger Weise. Da heute die Algebra in ihrem vorschreibenden Werte für die Geometrie häufig sehr hoch eingeschätzt, man könnte vielleicht sogar sagen überschätzt wird, ist es sehr begreiflich, wenn man dem indefiniten Begriff des reinen Verstandes auch in der Geometrie Heimatrecht gewährte, zumal ja die euklidische Geometrie damit vollkommen übereinstimmt.

Daß der algebraische Unendlichkeitsbegriff notwendig indefinit ist, läßt sich leicht einsehen. Hat man z. B. die Reihen $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ oder $2 + 4 + 8 + 16 \dots$, so gibt es für diese innerhalb des Verstandes unter keiner Bedingung ein Aufhören. Nur der objektive Tod aller denkenden Wesen könnte solche Reihen, wenn man sie wirklich zu Ende denken wollte, in gewaltsamer Weise abschließen. An sich selbst sind die Reihen endlos. Oder man denke an die Irrationalzahlen, z. B. an Wurzeln wie $\sqrt{2}$, und man hat ähnliche endlose Reihen, deren indefinite Natur auf keine Weise beseitigt werden kann.

Daß der algebraische Unendlichkeitsbegriff indefinit ist, besagt aber für die Geometrie noch gar nichts. Denn es ist, wie schon in § 30 gezeigt wurde, recht gefährlich, algebraische Anforderungen auf geometrische Wirklichkeiten zu übertragen. Die Geometrie ist nicht

ein abgeleitetes Gebiet der Algebra, sondern ein Gebiet von selbständig empirischem Charakter. Während die Algebra als eine Wissenschaft des reinen Verstandes Endlosigkeiten enthält, weil der Verstand wie ein Wille kein Maß und kein Ziel kennt, ist die Geometrie als eine Wissenschaft der Wirklichkeit wesentlich anders geordnet. In ihr trifft man das objektive Maß und Ziel, nach welchem die unabhängig vom bloßen Verstand gegebene Natur gebaut ist. Die Algebra ist gleichsam, wenn man sich mit Schopenhauer ausdrückt, eine dem Willen adäquate Wissenschaft, während die Geometrie eine Wissenschaft der willensfrei geschauten räumlichen Ideen ist, welche Auffassung übrigens auch der hohen Meinung Platos von der Geometrie entspricht.

Die algebraische Unendlichkeit ist indefinit. Die geometrische Unendlichkeit ist, wie auf Grund alles Bisherigen nicht bezweifelt werden kann, nichtsdestoweniger definit.

§ 46. Die Verwandtschaft zwischen dem algebraischen und dem geometrischen Unendlichkeitsbegriff.

Die Verwandtschaft des algebraischen und des geometrischen Unendlichkeitsbegriffes ist gegensätzlicher Natur. Die Algebra geht von einer als definit gesetzten Einheit aus und entwickelt diese in der Richtung auf die indefinite Totalität. Die objektive Geometrie dagegen geht von der definiten Maximalkonstanten „unendlich“ aus und erlangt die Einheit erst durch einen divisiven Prozeß, der an beliebiger Stelle aufhört. Algebra und objektive Geometrie unterscheiden sich inderselben Weise wie die individuelle und die überindividuelle Staatstheorie. Während jene vom Individuum ausgeht und im Staat ein indefinites Wesen erblickt, setzt die letztere den definiten Staatsbegriff an den Anfang aller Überlegung und sieht im Individuum ein indefinites Atom, dessen Wert vom Belieben abhängt. Algebra und individuelle Staatstheorie sind von induktiver Eigenart, da sie vom festen Einzelnen zum unbestimmten Allgemeinen aufsteigen. Objektive Geometrie und überindividuelle Staatstheorie sind von deduktiver Struktur, da sie die Totalität als definiten Begriff an den Anfang stellen und die kleine Einheit als divisives Resultat unseres Beliebens betrachten. In der euklidischen Geometrie ist eine solche deduktive Denkweise nicht möglich.

§ 47. Die Kugeloberfläche als Anschauungsmittel der objektiven Planimetrie.

Es dürfte sich nun empfehlen, sich über den Begriff Unendlich und überhaupt über die bestehenden Zusammenhänge der Polar-geometrie ein klares, anschauliches Bild zu verschaffen. Da die Ebene keine Eigenschaft besitzt, welche sich von den Eigenschaften einer Kugeloberfläche unterscheidet, außer der Eigenschaft der Ungekrümtheit, die auf die mathematischen Zusammenhänge und Verläufe ohne Einfluß bleibt, lassen sich alle Verhältnisse in der Ebene auf einer Kugeloberfläche darstellen. Diese Veranschaulichung ist bereits aus der Riemannschen Geometrie bekannt und soll hier nur weiter ausgearbeitet werden. Was im folgenden gesagt wird, ist auch für solche Beurteiler, die aus irgendwelchen dem Verfasser unbekannten Gründen an der euklidischen Geometrie glauben festhalten zu sollen, nicht ganz ohne Interesse, da es als Kapitel der Geometrie auf der Kugel auch an und für sich, ohne den Gedanken einer Übertragung aller Resultate auf die Ebene, einige neuen Sätze enthält. Nehmen wir also einen Globus zur Hand und suchen wir uns darauf zu orientieren.

§ 48. Die Orientierung auf dem Globus.

Der Kürze und Deutlichkeit halber seien hier auch geographische Ausdrücke gebraucht. Man nehme auf der Kugel einen Nordpol, einen Südpol und einen Äquator an. Den Nordpol bezeichne man mit ± 0 , den Südpol mit $\pm \infty$. Durch diese Pole lege man ein senkrechtes Achsenkreuz zweier Meridiane (Hauptkreise), dessen einen man als X-Achse, dessen andern man als Y-Achse bezeichne. Man unterscheide die südliche Halbkugel von der nördlichen recht deutlich durch eine andere Farbe, etwa durch einen grünen Anstrich, während die nördliche Halbkugel rot gefärbt sein möge.

Diese Kugel hat zwei Normalstellungen, die wir mit A und B bezeichnen. Normalstellung A besteht dann, wenn der Punkt ± 0 dem Beobachter zugekehrt ist, und zwar so, daß die X-Achse wagerecht verläuft. Normalstellung B besteht dann, wenn der Punkt $\pm \infty$ dem Beobachter zugekehrt ist, wobei ebenfalls die X-Achse wagerecht verlaufen soll. Die Hauptkreislänge von Pol zu Pol heiße nach § 11 Def. XI „unendlich“, mit Zeichen ∞ . Ein

Viertelhauptkreis ist dann also $\frac{\infty}{2}$, ein voller Hauptkreis 2∞ . Die Länge ∞ entspricht demnach dem Winkel von 180 Grad.

§ 49. Annahme einer endlichen Maßeinheit und Feststellung der Koordinatenbezeichnung.

In der messenden, z. B. der analytischen Geometrie, ist es unerläßlich, eine endliche Maßeinheit anzunehmen, die sich von der objektiven Naturkonstanten ∞ durch beträchtliche Kleinheit unterscheidet. Auch auf dem Anschauungsmodell der Ebene, der Kugel, ist die Wahl einer solchen Einheit nötig. Man nimmt also auf X- und Y-Achse vom Schnittpunkt der beiden Achsen gerechnet eine ziemlich kleine, aber noch deutlich sichtbare Hauptkreisstrecke an und bezeichnet dieselbe mit 1. Durch Abtragung dieser Strecke auf dem ganzen Verlauf der Achsen erhält man die laufende Einteilung bis unendlich.

Da die Einheit ein bestimmter Bruchteil der Länge unendlich ist, geht sie in der letzteren auch bestimmt viel mal auf. Die Zahl dieses Enthaltenseins ist aber von der Willkür abhängig, mit der man die Länge der Einheit festsetzt. Da diese Länge beliebig klein wählbar ist, ist die Zahl, welche ihr Enthaltensein in der objektiven Maximalkonstanten unendlich angibt, beliebig groß. Durch dieses Verhältnis wird der Charakter der Größe unendlich, als eine an keine bestimmte Zahl gebundene Länge, zweifellos gewahrt.

Es sind nun noch die Vorzeichen der Achsen festzusetzen. Dafür gilt folgende Regel: In jeder Normalstellung bedeuten die Richtungen nach rechts und oben die positiven, die Richtungen nach links und unten die negativen Richtungen. Daraus folgt, daß jeder Punkt der Kugeloberfläche ein positives oder negatives x besitzen würde, je nachdem er auf Normalstellung A oder B bezogen würde. Um auch hier eine Eindeutigkeit zu haben, setzt man fest, daß in der Regel jeder Punkt der roten Kugelhälfte auf Normalstellung A, jeder Punkt der grünen Kugelhälfte auf Normalstellung B bezogen werden soll. Die Zählung von Einheiten erfolgt also in der Regel nur bis $x = \pm \frac{\infty}{2}$ und $y = \pm \frac{\infty}{2}$, an welchen Stellen eine Umschaltung der Gleichungen auf die neue Normalstellung eintritt. Es bleibt

noch nachzutragen, daß man selbstverständlich die Einheit 1 so wählen wird, daß sie in der Maximalkonstanten unendlich ohne Rest aufgeht, also ein einfacher Bruchteil derselben ist.

§ 50. Demonstrierung der Paralleleigenschaften auf der Kugel.

Der erste Gebrauch, den man von der Kugel als Modell machen wird, besteht natürlich in der Aufzeigung der Paralleleigenschaften. Man ziehe also in beliebigen Abständen Parallelen zur X- und Y-Achse, d. h. Hauptkreise, die auf der Y- und X-Achse senkrecht stehen. Und man findet, daß die so entstehenden beiden Systeme von Parallelen sich in je zwei Punkten auf dem Ebenenäquator schneiden. Auch diese vier Kardinalpunkte seien dauernd festgehalten. Wir bezeichnen diejenigen Kardinalpunkte, in welchen die Parallelen zur X-Achse sich schneiden, als die Kardinalpunkte I und II, wobei I auf der positiven Seite der Normalstellung A liege. Die Punkte, in welchen sich die Parallelen zur Y-Achse schneiden, heißen Kardinalpunkte III und IV, wobei III auf der positiven Seite liege. Die Kugel hat also sechs Hauptpunkte, die um 90 Grad oder $\frac{\infty}{2}$ voneinander entfernt liegen. Nämlich die beiden Pole und die vier Kardinalpunkte.

§ 51. Die Gleichung der Geraden.

Im folgenden wird kurz von Geraden gesprochen und als bekannt vorausgesetzt, daß diese im Modell als Hauptkreise erscheinen. Zeichnet man in Normalstellung A eine Gerade, welche die X-Achse im Abstand $+a$ und die Y-Achse im Abstand $+b$ schneidet, so hat diese die Gleichung: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Diese Gleichung bezieht sich aber nur auf Normalstellung A. Um dies anzudeuten, schreibt man besser: $\frac{x}{a_0} + \frac{y}{b_0} = 1$, wobei der Index bedeutet, daß a und b vom Punkte ± 0 aus gerechnet sind. Oder man kann auch schreiben: $\frac{x}{a \pm 0} + \frac{y}{b \pm 0} = 1$, wobei die nichts verändernde Beifügung ± 0 die gleiche Bedeutung hat.

Ergänzt man nun die Gerade zur Totalgeraden, und betrachtet sie in Normalstellung B, so zeigt sich, daß sie die X-Achse wieder im Abstände $+a$, die Y-Achse dagegen im Abstände $-b$ schneidet.

Sie hat also für Normalstellung B die Gleichung: $\frac{x}{a_\infty} + \frac{y}{-b_\infty} = 1$,

oder: $\frac{x}{a \pm \infty} + \frac{y}{b \pm \infty} = 1$. Letztere Gleichung deutet an, daß die Schnittpunkte der Geraden mit beiden Achsen in Normalstellung B sich von den Schnittpunkten in Normalstellung A um die Entfernung ∞ in positiver oder negativer Richtung unterscheiden.

Jede Totalgerade hat demnach zwei Gleichungen, für jede Normalstellung eine einzige. Sie lauten: $\frac{x}{a \pm 0} + \frac{y}{b \pm 0} = 1$, und:

$\frac{x}{a \pm \infty} + \frac{y}{b \pm \infty} = 1$. Durch diese Erkenntnis wird die Natur der Geraden als Kurve ersten Grades gewahrt. (Vgl. § 35.)

§ 52. Die Gleichung einer Parallelen zu einer Achse und die Gleichung des Ebenenäquators.

Auf dem Standpunkt der euklidischen Geometrie hat die Parallele zur X-Achse im Abstand b die Gleichung: $y = b$. Diese Gleichung kann in der Polargeometrie keine Gültigkeit haben, weil in dieser zwei Parallelen keinen gleichbleibenden Abstand voneinander besitzen, sondern sich schneiden. Von Linien konstanter Krümmung, welche konstanten Abstand voneinander besitzen, kann höchstens eine einzige eine Gerade sein. Die andern sind Kreise, was man sich ebenfalls an der Kugel bestens klarmachen kann. Zwei Geraden einer Ebene müssen sich notwendig schneiden.

Die Parallele zur X-Achse im Abstände b auf der Y-Achse gemessen hat in der Polargeometrie die Gleichung, welche man von der

Kugel abliest: $\frac{x}{\pm \frac{\infty}{2}} + \frac{y}{b} = 1$. Diese Gleichung folgt unmittelbar

aus der allgemeinen Gleichung der Geraden § 51 und hat auch nicht den in der euklidischen Gleichung auftretenden formalen Mangel, daß die Größe x fortfällt.

Der Ebenenäquator hat aus denselben Gründen die Gleichung:

$$\pm \frac{x}{\frac{\infty}{2}} + \pm \frac{y}{\frac{\infty}{2}} = 1.$$

Bei dieser Gelegenheit sei ausdrücklich betont, daß die objektive Konstante $\frac{\infty}{2}$ in analytischen Gleichungen wie jede andere Konstante vollberechtigt figurieren kann. Sie darf nicht etwa durch die aus der Algebra geläufigen Approximationsverfahren beseitigt werden. Zum

Beispiel ist $\frac{x}{\frac{\infty}{2}}$ durchaus nicht gleich null zu setzen. Denn die objektive Geometrie ist auch in Beziehung auf das Unendliche eine exakte Wissenschaft.

§ 53. Der Verlauf der Hyperbel.

Der Einfachheit halber sei zuerst von der gleichseitigen Hyperbel gesprochen. Es sei gegeben die Hyperbel $x^2 - y^2 = +a^2$ in Normalstellung A, und ihre Asymptoten. Die Hyperbel nähert sich wie eine parallele Gerade an ihre Asymptoten an, d. h. erreicht dieselben nicht früher als auf dem Ebenenäquator, also in der Entfernung $\frac{\infty}{2}$ vom Achsenschnittpunkt. Daß sich Hyperbeln und ihre Asymptoten

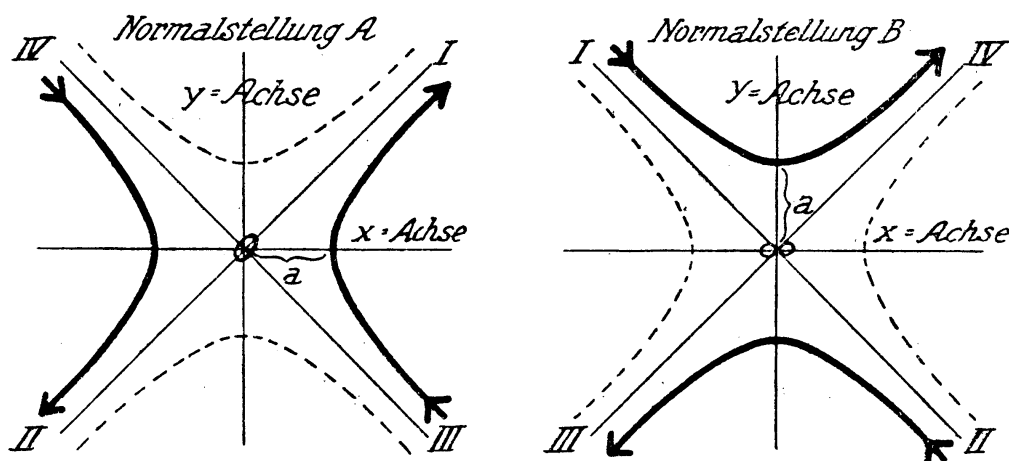


Fig. 17.

in reellen Punkten schneiden, ist ein untrennbares Analogon des Satzes, daß Parallelen sich in reellen Punkten schneiden und folgt schon aus der Tatsache, daß auf der Kugel ein anderer Verlauf gar

nicht denkbar ist, wenn die Hyperbel in beiden Normalstellungen Hyperbel bleiben soll, was wohl nicht bezweifelt werden dürfte.

Die Hyperbel $x^2 - y^2 = +a^2$ tritt also am Ebenenäquator in den Nebenwinkel ihrer Asymptoten ein¹⁾. Sie erscheint in Normalstellung B als Hyperbel, deren Pole auf der Y-Achse liegen. Während sie in Normalstellung A wagerecht verläuft, verläuft sie in Normalstellung B senkrecht. In Stellung A hat sie zwei Pole auf der X-Achse, in Stellung B zwei Pole auf der Y-Achse. Nun ist aber allgemein bekannt, daß eine Hyperbel mit den Polen auf der Y-Achse, eine sog. konjugierte Hyperbel, die Gleichung besitzt: $x^2 - y^2 = -a^2$. Wir können also dem bisherigen zwei Folgerungen entnehmen:

1. Die ursprüngliche Hyperbel in Normalstellung A und die konjugierte Hyperbel in Normalstellung B bilden denselben Linienzug.
2. Die rote Ebenenhälfte unterscheidet sich von der grünen analytisch durch das Vorzeichen der Konstanten a^2 . Die Hyperbel welche auf der roten Hälfte die Konstante $+a^2$ hat, erhält auf der grünen Hälfte die Konstante $-a^2$. Das heißt: rote und grüne Hälfte der Ebene unterscheiden sich durch das Vorzeichen der quadratischen Konstanten. Diese Erkenntnis wird bald in besonderer Weise ihre Dienlichkeit bezeugen.

§ 54. Die konjugierte Hyperbel derselben Normalstellung als Gegenhyperbel der ursprünglichen.

Es ist augenscheinlich, daß jedem Punkt auf der Kugeloberfläche ein Gegenpunkt entspricht, der um 180 Grad von ihm entfernt ist. Zeichnet man nun eine wagerechte Hyperbel in Normalstellung A, welche in Normalstellung B als senkrechte Hyperbel erscheint, und bildet man die Kurve der Gegenpunkte dieser Kurve, so findet man, daß es die senkrechte Hyperbel in Normalstellung A und also die wagerechte Hyperbel in Normalstellung B ist.

Man halte demnach fest, daß jeder Asymptotenwinkel zu zwei Hyperbelverläufen Anlaß gibt, deren jeder in sich selbst zurückläuft, deren jeder auf einer Ebenenhälfte senkrecht, auf der anderen Ebenenhälfte wagerecht verläuft, und deren jeder sich aus den Gegenpunkten

¹⁾ Diese Dinge sind sogar in der Geometrie der Kugeloberfläche als solcher noch neu. R. Heger, Analyt. Geom. auf d. Kugel, erwähnt nichts von den Verläufen der Kugelkegelschnitte.

des andern zusammensetzt. Diese schönen Beziehungen sind für die objektive Geometrie eine weitere Empfehlung.

Was die Gleichungen betrifft, so wird man sie nach dem Prinzip formulieren, daß dieselbe Kurve in ihrem ganzen Verlaufe dieselbe Gleichung behalten soll. Dann ergibt sich folgende Tabelle

1. Normalstellung A, wagerechte Hyperbel: $x^2 - y^2 = +a^2$.

2. Normalstellung B, senkrechte Hyperbel: $x^2 - y^2 = +a^2$.

Diese senkrechte Hyperbel, welche in Normalstellung A die negative Konstante haben müßte, hat hier die positive Konstante, weil die Unendlichkeitshälfte der Ebene alle Vorzeichen umkehrt.

3. Normalstellung A, senkrechte Hyperbel: $x^2 - y^2 = -a^2$.

4. Normalstellung B, wagerechte Hyperbel: $x^2 - y^2 = -a^2$.

Diese wagerechte Hyperbel, welche in Normalstellung A die positive Konstante haben müßte, hat hier die negative Konstante, weil die Unendlichkeitshälfte der Ebene alle Vorzeichen umkehrt.

Schließlich dürfte die Bemerkung am Platze sein, daß entgegengesetztes Vorzeichen quadratischer Konstanten nur bei Gegenkurven, d. h. Kurven aus Gegenpunkten, auftritt, und daß diese Umkehrung des Vorzeichens bei Gegenkurven ein allgemeines Gesetz ist, das sich z. B. auch bei der Ellipse bewähren wird.

§ 55. Bemerkung über die allgemeine Hyperbel.

Dieselben Zusammenhänge, die für die gleichseitige Hyperbel abgeleitet wurden, bestehen auch für die allgemeine Hyperbel von

der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es ist nur noch darauf aufmerksam

zu machen, daß die Hyperbel, welche in Normalstellung A die X-Achse im Abstände a schneidet, in Normalstellung B die Y-Achse im Abstände b trifft. Ähnlich ist das Verhältnis bei der Gegenhyperbel.

Da allgemein die Lehre vertreten wird, eine wagerecht verlaufende Hyperbel schneide die Y-Achse in imaginären Punkten, d. h. überhaupt nicht, während die objektive Geometrie ausdrücklich zwei reelle Schnittpunkte mit der Y-Achse behauptet und vorzeigt, haben wir diesen Zwiespalt zu erklären. Dies kann nicht dadurch geschehen, daß etwa eine der beiden Behauptungen als unzutreffend dargetan wird. Sie sind zweifellos beide wohlbegründet. Sondern es geschieht wieder in sehr einfacher Weise dadurch, daß man erkennt, daß die

algebraische Analyse, welche zu imaginären Schnittpunkten führt, nur auf eine Ebenenhälfte sich bezieht, z. B. auf die rote. Die Aussage der Polargeometrie dagegen spricht von der Totalebene in ihren beiden Hälften. Vgl. auch § 62.

§ 56. Die Darstellung der Totalebene durch die Lambertsche Münze.

Die Darstellung der Totalebene durch eine Kugeloberfläche hat zwei Mißstände, einen praktischen und einen theoretischen. Der praktische besteht darin, daß es nicht leicht ist, eine Kugeloberfläche mit bestimmten Kurven in einem Buche klar und bequem abzubilden. Der theoretische Nachteil liegt darin, daß das zweidimensionale Gebilde der Totalebene durch die Kugel ein dreidimensionales, d. h. gekrümmtes Aussehen erhält, wodurch jede Möglichkeit, auch den Totalraum auf ähnliche Weise abzubilden, ausgeschlossen ist. Denn vier Dimensionen stehen uns nicht zur Verfügung. Deshalb soll jetzt ein neues Mittel angegeben werden, um die Totalebene abzubilden, welches die soeben genannten Mängel nicht an sich hat. Dies ist das Gebilde, welches wir als Lambertsche Münze bezeichnen wollen.

Es ist bekannt, daß Johann Heinrich Lambert der Erfinder derjenigen Kartenprojektion ist, die gestattet, eine Hälfte der Erdkugel als Kreis darzustellen. (Flächentreue Azimutalprojektion.) In den meisten besseren Atlanten findet man auch eine Darstellung der beiden Erdhalbkugeln, der nördlichen und der südlichen, in der Lambertschen Projektionsform. Handelt es sich um diese beiden Halbkugeln, so erscheinen die Breitenkreise als ebene Kreise und die Meridiane als Geraden, die sich im Mittelpunkt dieser konzentrischen Kreise strahlenförmig schneiden.

Man kann in dieser Weise eine Kugeloberfläche mathematisch korrekt auf zwei Kreisflächen darstellen. Man kann also die Totalebene ebenfalls durch zwei Kreise mathematisch korrekt darstellen. Es ist nun gewiß empfehlenswert, die organische Einheit der Kugel oder der Totalebene auch im Modell zu wahren. Dies geschieht am besten dadurch, daß man sich die beiden Kreisflächen hintereinander geklebt denkt, oder daß man sie auf die Vor- und Rückseite ein und desselben kreisförmigen Stückes Papier gezeichnet denkt. Die ganze Totalebene ist also unter Benützung der Lambertschen Projektionsform als Münze darstellbar, deren eine Seite den roten, deren andere Seite