

§ 12. Deduktion der Eigenschaften von Parallelen.

Da nach Definition I, VIII und IX Geraden und Ebenen kontinuierliche Grenzwerte von gleichmäßig gekrümmten Linien und Flächen, d. h. von Kreisen und Kugeln, sind, so ergibt sich notwendig, daß die arithmetische Anzahl, welche für Geradenschnittpunkte einer Ebene in Betracht kommt, keine andere sein kann als die Anzahl der Schnittpunkte von Kugelhauptkreisen auf einer Kugeloberfläche. Folglich haben zwei parallele Geraden (vgl. Def. X) zwei reelle Schnittpunkte, die in entgegengesetzter Richtung von der Parallelitätsstelle liegen.

Es folgt ferner aus denselben Prämissen, daß überhaupt je zwei Geraden einer Ebene sich in zwei Punkten schneiden und in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten parallel sind. Einwände dagegen sind später zu widerlegen.

Es ist nunmehr bereits der Beweis geliefert,

1. daß die euklidische Parallelenlehre, welche nichtschneidende Geraden einer Ebene annimmt, mit Schimären operiert.

2. Daß die moderne Bestimmung der Eigenschaften von Parallelen durch willkürlich gewählte Axiome nicht die letzte Entscheidung liefern kann, weil nur eines von diesen Axiomen, nämlich das Desargues-Riemann-Helmholtzsche Axiom, sich als Resultat geometrischer Deduktion ergibt, also objektiv berechtigt ist.

Die Geometrie von Lobatschewsky-Bolyai, welche sogar mehrere Nichtschneidende durch einen Punkt P bezüglich einer Geraden g annimmt, ist, wenn man so sagen darf, noch falscher als die Geometrie Euklids. Die Geometrie von Klein-Clifford schließlich, welche einen einzigen Parallelenschnittpunkt annimmt, bedeutet zwar gegenüber Euklid eine gewisse Annäherung an die Objektivität, ist aber durch obige ebenso zwingende wie einfache Deduktion ebenfalls widerlegt.

§ 13. Ebener Beweis für den Grundgedanken.

M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Peripherien P_1 und P_2 . S_1 und S_2 seien die Schnittpunkte der Kreise, t_1 und t_2 die Tangenten im Punkte S_1 .

Man denke sich unter Festhaltung des Punktes S_1 sowie der Tangenten t_1 und t_2 den Radius der Kreise beschleunigt vergrößert.

Dann schmiegen sich die Peripherien P_1 und P_2 immer mehr an die Tangenten t_1 und t_2 an. Gleichzeitig bewegt sich der Schnittpunkt S_2 in Richtung R vorwärts. Wenn nun schließlich der nicht zu vermeidende Fall eintritt, daß P_1 und P_2 mit t_1 und t_2 zusammenfallen, so kann S_2 nicht plötzlich von der Ebene verschwinden, sondern es bleibt reeller zweiter Schnittpunkt der in t_1 und t_2 übergegangenen Peripherien P_1 und P_2 . Folglich haben irgend zwei Geraden t_1 und t_2 einer Ebene nicht bloß einen, sondern zwei Schnittpunkte.

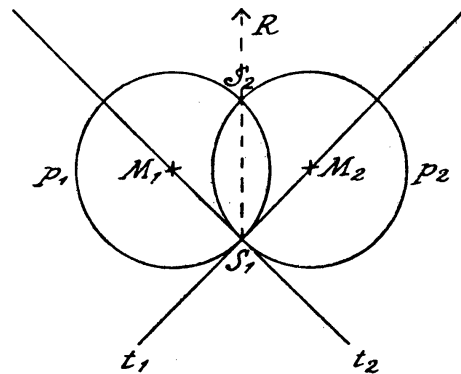


Fig. 4.

§ 14. Deduktion der Parallelenschnittpunkte aus dem Kontinuitätsprinzip.

„Natura non facit saltus“, sagten die alten Forscher. Die neueren formulieren diesen Satz methodisch, indem sie die Forderung aufstellen, in keinem Funktionsverlauf der Natur und des Denkens gewaltsame Sprünge anzunehmen, außer an solchen Stellen, wo dies auf Grund objektiver Kriterien notwendig sein sollte. Die Kontinuität ist vielleicht ein Naturgesetz; sicher aber eine methodische Forderung. Nun aber wäre das Kontinuitätsprinzip durchbrochen, wenn Parallelen keine Schnittpunkte haben würden. Dies ist leicht einzusehen.

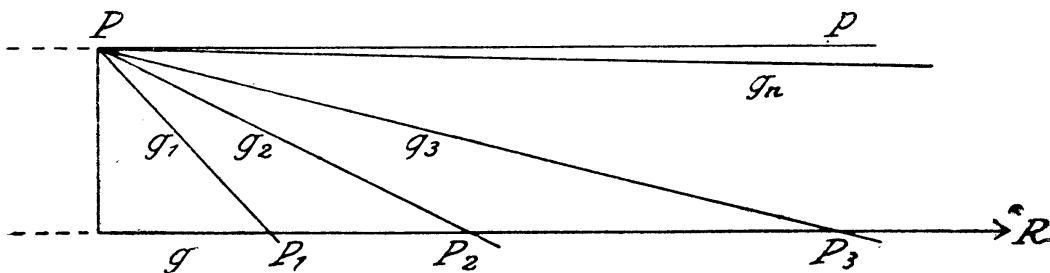


Fig. 5.

Punkt P und Gerade g seien gegeben. Es seien $g_1, g_2, g_3, \dots$, Geraden durch P , welche g in $P_1, P_2, P_3, \dots$ schneiden. Je weiter sich die Gerade an die Parallele p annähert, desto weiter entfernt sich ihr Schnittpunkt mit g in der Richtung R . Wenn nun die Parallele p

selbst mit g gar keinen Schnittpunkt hätte, so würde sie gegenüber dem ihr benachbarten Strahl g_n des Strahlenbüschels einen plötzlichen, ungeheuren Sprung machen. Da aber die Annahme dieses geradezu grotesken Sprunges durch keine Tatsachenerwägung notwendig gemacht wird, sondern da im Gegenteil alle geometrischen Zusammenhänge nur beim Fehlen eines solchen Sprunges glatt und klar sich zusammenfügen, müßte man in der Tat sehr schlecht beraten sein, wenn man die Geometrie durch die Annahme, daß p und g sich niemals schneiden, aus den Fugen sprengen würde. Aus dem Kontinuitätsprinzip, welches durchaus nicht bloß ein subjektiver Wahn ist, sondern vielmehr ein Mittel, daß das Denken mit der natürlichen Struktur der Dinge konform bleibe, folgt ohne Zweifel die Existenz von Parallelenschnittpunkten. Daß hierbei die beiden in Betracht kommenden Schnittpunkte nicht in einen einzigen zusammenfallen, muß nach § 11 bewiesen werden.

§ 15. Ursache des euklidischen Irrtums.

Wenn die Annahme nichtschneidender Geraden einer Ebene in der Tat eine so gefährliche Sache ist, welche geradezu dem geometrischen Kausalgesetz widerspricht, so ist es besonders merkwürdig, daß die Gelehrten vieler Jahrhunderte diese irrtümliche Ansicht vertreten haben. Man wird sich die Ursache dieser Erscheinung überlegen. Nun kann aber jeder an sich selbst diese Ursache lebhaft nachfühlen. Linien, die sich erst in so ungeheuer großer Entfernung schneiden, daß das Auge selbst bei weitem Horizont nicht imstande ist, ihre Konvergenz zu bemerken, wird das natürliche Urteil als überhaupt nichtschneidend bezeichnen. Parallelen unterstützen dieses Urteil noch dadurch, daß sie im Strahlenbüschel eine symmetrisch ausgezeichnete Lage innehaben. Bei dem naturgemäßen Falschurteil der Sinne bleibt man, bis später die Argumente des Verstandes diesen Standpunkt korrigieren.

Die euklidische Parallelenlehre beruht auf einem sinnlich begründeten Urteil, auf einer Verstandestäuschung, die erst seit dem 16. Jahrhundert angefangen hat, durch die rationale Aufklärung abgelöst zu werden. Diese Aufklärung ist durch die Polargeometrie beendet. Euklids Parallelenlehre vernachlässigt die Kontinuität und Erhaltung der geometrischen Elemente und enthält einen Traumbestandteil. Sie ist ein Irrtum des antiken Mathematikers. (Vgl. § 14, § 37.)

§ 16. Verhältnis der euklidischen Täuschung zur modernen Grundlegung der Geometrie.

Euklid ist nicht nur der Vater der euklidischen, sondern auch der nichteuklidischen Geometrien. Hätte Euklid die Gerade nicht als geometrisches Wunder inauguriert, indem er sie ohne jeden Zusammenhang mit dem Kreise behandelte, und hätte er nicht außerdem die Parallele aus Rand und Band springen lassen, so hätten sich die Modernen diesen Wunderglauben auch nicht zum Beispiel genommen. So aber wurde durch die eine berühmte Autorität die ganze Wissenschaft in ein unvorteilhaftes Geleise gelenkt. Es ist vollkommen verfehlt, das Parallelenproblem unabhängig vom geometrischen Zusammenhang zu behandeln. Keine Naturwissenschaft wäre jemals so unkritisch, daß sie über ein Phänomen willkürlich vorurteilte, ohne es nach allen Seiten studiert zu haben. Das gegenseitige Verhalten zweier Parallelen läßt sich zwar nicht direkt in der Erfahrung beobachten, wohl aber zuverlässig aus der Erfahrung indirekt ableiten. Das geschieht, indem man sich darüber klar wird, daß Ebenen und Geraden objektiv Grenzwerte von Kugeloberflächen und Kreisen sind, daß also die erfahrungsgemäße Anzahl der Schnittpunkte zweier Hauptkreise auf der Kugel sich auf die zu erschließende Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden übertragen läßt. Das Parallelenproblem muß auf Grund sicherer indirekter Erfahrung gelöst werden, darf aber nicht durch logistische Axiomatik zur Unlösbarkeit verurteilt bleiben.

Daß also auch für die moderne Grundlagenforschung die Thesen dieses Buches von Belang sind, unterliegt keinem Zweifel.

§ 17. Der Beweis des Grundgedankens durch die Hyperbel.

Die Hyperbel ist wie die Ellipse zweifellos, und wie allgemein zugegeben wird, eine einzige Kurve. Sie besteht aber aus zwei Ästen, die sich nach entgegengesetzten Richtungen der Ebene voneinander entfernen.

Würden diese Äste nicht einen durch das „Unendliche“ geschlossenen Linienzug bilden, so wäre offenbar die

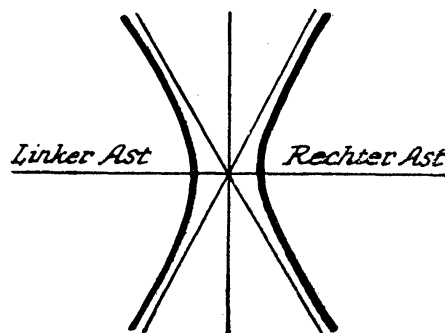


Fig. 6.

Einheit der Hyperbel zerstört. Das kann nicht sein. Folglich müssen die beiden Äste einer Hyperbel durch das „Unendliche“ irgendwie ineinander übergehen. Das kann nur dann geschehen, wenn die Ebene selbst in sich selbst zurückläuft, d. h. nicht endlos ist¹⁾. Dieses aber kann nur dann stattfinden, wenn zwei Parallelen sich in bestimmten Punkten schneiden. Also ist die Hyperbel ein Beweis dafür, daß die Euklidische und die Lobatschewsky - Bolyaische Parallelen-theorie irrtümlich ist.

Daß die Hyperbel einen geschlossenen Linienzug bildet, ist natürlich keine Neuigkeit. Seit Desargues wird diese Sache von den meisten Geometern anerkannt. Nur die Art und Weise des Verlaufes der Hyperbel durch das „Unendliche“ ist noch nicht richtig determiniert worden. Doch dieser Punkt muß in den Folgerungen seine Stelle erhalten.

Trotzdem nicht neu ist, was in diesem Paragraphen über die Hyperbel gesagt wurde, so ist doch sehr neu die konsequente Schlußfolgerung, welche an die Hyperbel anknüpft. Wir machen hier zum erstenmal mit einer Sache ernst, die bisher gleichsam bloß als nebensächlicher Spaß existiert hat. Wenn man nicht im Denken nachlässig gewesen wäre, hätte man längst erkennen müssen, daß die Parallelen-lehren von Euklid und Lobatschewsky-Bolyai, welche die Ebene endlos machen, durch die bloße Existenz der Hyperbel widerlegt sind. Wer die Ebene endlos sein läßt, behauptet $1 = 2$, indem er nämlich aus der einen Hyperbel zwei getrennte Figuren macht. Denn es folgt analytisch aus dem Begriff und Sinn der Endlosigkeit, daß sie nicht in sich zurücklaufen kann. Wer aber in der Geometrie $1 = 2$ sein läßt, ist gedankenlos.

§ 18. Der Beweis des Grundgedankens durch den Satz von Pascal.

Pascals Satz lehrt, daß bei jedem Sehnensechseck eines Kegelschnittes die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Sehnen auf einer Geraden liegen. Dieser Satz gilt, wie die Konstruktion nach-

¹⁾ Man wolle die Begriffe „unendlich“ oder ∞ und „endlos“ in der Darstellung dieses Buches scharf auseinanderhalten. Als ∞ oder „unendlich“ ist dem mathematischen Sprachgebrauch gemäß der geometrisch sinnvolle Begriff bezeichnet (§ 11 Def. XI). Und von ihm wird nachgewiesen, daß er nicht die Eigenschaft hat, endlos zu sein.

weist, auch dann, wenn ein Eckpunkt des Sehnensechsecks im „Unendlichen“ liegt, was bei Parabel und Hyperbel eintreten kann. Wäre nun dieser Punkt im „Unendlichen“ kein wirklicher Punkt, sondern nur eine Erfindung der Menschen, so wäre er also, man muß dies betonen, objektiv überhaupt nicht vorhanden. Das Pascalsche Sechseck hätte also keine 6, sondern nur 5 Eckpunkte, und außerdem ein sonderbares Uding im Endlosen, das weder ein Punkt, noch sonst etwas ist. Es würde sich also nur um fünf Punkte handeln.

Da dies nicht sein kann, weil die Gleichung $5 = 6$ ebenso wenig gilt wie die Gleichung $0 = 1$ oder $1 = 2$, so ist damit ausgemacht, daß der Punkt im „Unendlichen“, der beim Pascalschen Satz in Betracht kommen kann, ein reeller Punkt ist. Das kann aber nur sein, wenn zwei Parallelen sich in reellen Punkten schneiden. Dies aber ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Ebene nicht endlos, sondern in sich selbst geschlossen ist. Folglich ist auch der Satz von Pascal ein klarer Beweis gegen die Parallelentheorien von Euklid und Lobatschewsky-Bolyai. Die Theorie von Klein-Clifford, welche keine Dualität der Schnittpunkte anerkennt, muß immer nach § 11 widerlegt werden.

§ 19. Der Beweis des Grundgedankens durch die trigonometrische Tangente.

Es ist bekanntlich $\frac{t_1}{r} = \tan \alpha_1$; $\frac{t_2}{r} = \tan \alpha_2$; usw. Wird nun

$\alpha = 90$ Grad, so wird das Stück t , wenn die Parallelen p_1 und p_2 sich schneiden, zwar sehr groß, aber der Tangens von 90 Grad bleibt jedenfalls eine bestimmte und klare Größe. Anders würde es sich verhalten, wenn p_1 und p_2 sich nicht schneiden. Dann wäre der Begriff $\tan 90$ Grad ein wahres Monstrum. Denn die betreffende Strecke t würde überhaupt nicht existieren, sondern wäre ein endloses Uding, welches aller Beschreibung spottet¹⁾.

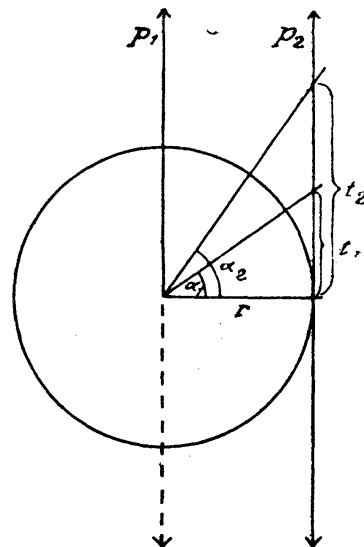


Fig. 7.

¹⁾ Hessenberg lehrt demgemäß (Trigon. S. 25), $\tan 90^\circ$ sei nicht definierbar. Man

Es ist nun klar, daß die Geometrie soliden Begriffen vor phantastischen Uferlosigkeiten den Vorzug zu geben hat, wenn dies nur irgend möglich ist. In diesem Falle aber ist es sehr gut möglich. Nichts spricht dagegen, alles spricht dafür, daß p_1 und p_2 als schneidend angenommen werden müssen, und zwar nicht bloß gelegentlich wie zum Spaß, sondern überall und in vollem Ernst. Die mitunter vorkommende Annahme „idealer oder uneigentlicher Schnittpunkte“, die keine geometrischen Schnittpunkte sein sollen, ist ein vielsagendes Zeichen für die Unzulänglichkeit des euklidischen Standpunktes. Dieser Standpunkt kann keinen Schnittpunkt zugeben. Der systematische Zusammenhang der Geometrie drängt aber mit Macht zur Annahme eines Schnittpunktes. Was tut man in diesem Dilemma? Man erfindet einen „idealen oder uneigentlichen Schnittpunkt“, der ehrlich gesagt überhaupt kein Schnittpunkt ist. Man möchte den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen. Da dies allerdings nicht geht, bleibt nur übrig, den euklidischen Standpunkt aufzugeben und mit dem Riemannschen zu vertauschen. Dann hat man einen Schnittpunkt, der auch wirklich einer ist.

Die trigonometrische Tangente in ihrem Verlauf ist ein Beweis für die einzige Berechtigung unseres Grundgedankens. Die Parallele p_1 schneidet p_2 in zwei Punkten, deren einer auf der positiven, deren anderer auf der negativen Seite der Tangenten liegt. Es ist also $\tan 90^\circ = \pm \frac{\infty}{2}$, d. h. plus oder minus der Hälfte der Distanz ∞ der Geradenschnittpunkte, wobei $r = 1$ gesetzt ist.

§ 20. Auflösung eines trigonometrischen Paradoxons.

Sei Kurve f eine Funktion, die in P ein Maximum erreicht. Die Wissenschaft lehrt nun bekanntlich, daß die Tangente t die X -Achse unter einem Winkel null schneidet, welche Größe auch immer der

schreibe $\tan 90^\circ = \infty$, um anzudeuten, daß $\tan a$ bei der Annäherung von a an 90° jeden beliebig großen Wert annehmen kann.

Diese Angabe entspricht dem Standpunkt der euklidischen Geometrie. Aber wie unbefriedigend ist sie für jedes definite Denken! Zunächst wäre es sehr schade, wenn $\tan 90^\circ$ nicht definierbar wäre. Die Mathematik hat dafür zu sorgen, daß $\tan 90^\circ$ definierbar wird. Das ist gerade ihre Aufgabe. Ferner wollen wir hier gar nicht von einer Annäherung von a an 90° sprechen, sondern von dem Grenzfall $a = 90^\circ$ selbst. Die angenäherten Werte sind natürlich immer etwas kleiner als der Grenzwert.

Abstand d besitze. Die Differentialrechnung bekräftigt diese Lehre noch dadurch, daß sie das Maximum berechnet, indem sie den Differentialquotienten, also die trigonometrische Tangente des Tangentenschnittwinkels mit der X-Achse, gleich null setzt. Dadurch behauptet sie eben auch, daß der Schnittwinkel selbst die Größe null habe.

Nun behauptet die hier gebotene Geometrie, daß die Tangente t die X-Achse nur dann unter dem Winkel null schneidet, wenn d gleich null ist, und daß der Winkel bei wachsendem d sogar bis zu 90 Grad wachsen kann.

Diese Behauptung ist dem Wortlaut nach der üblichen Lehre diametral entgegengesetzt, und es hat den An-

schein, als ob sie deren sichere Grundlagen negieren würde. Indessen ist diese Befürchtung glücklicherweise unzutreffend. Unsere Geometrie würde sich sehr hüten, an Dingen zu rütteln, die sich als so brauchbar und einleuchtend erwiesen haben wie die obengenannten Festsetzungen der Wissenschaft. Unsere Geometrie zweifelt nicht daran, daß man zur Berechnung eines Maximums auch in Zukunft den Differentialquotienten gleich null setzen soll. Und dennoch hält sie ihre eigentümlichen Behauptungen über den Tangentenschnittwinkel aufrecht. Das erscheint paradox und bedarf also der Erläuterung.

Dreht man den verlängerten Abstand d um P in Richtung des Pfeiles bis in die Lage der Tangenten t , so vermindert sich sein Schnittwinkel mit der X-Achse bis zu dem unter Voraussetzung der Lage des Punktes P möglichen Minimum. Vom Standpunkt dieser Winkelreihe betrachtet, ist der Schnittwinkel von t mit der X-Achse das absolute Minimum, das als Null zu bezeichnen ist. Nun aber hindert uns nichts daran, diesen Nullwinkel am Ort des Schnittes selbst in Augenschein zu nehmen. Da zeigt sich aber, daß auch er selbst, der Nullwinkel, einen Prozeß zwischen null Grad und 90 Grad durchlaufen kann, je nach der Länge des Abstandes d . Diese Paradoxie, daß eine elementare Nullgröße von einem unendlich weit abgelegenen Standorte aus jeden beliebigen Größenwert haben kann, ist seit Leibniz in der Mathematik nichts Neues. Es ist einfach das große Grundgesetz der Differentialrechnung selbst. Wie die Differentialrechnung, so

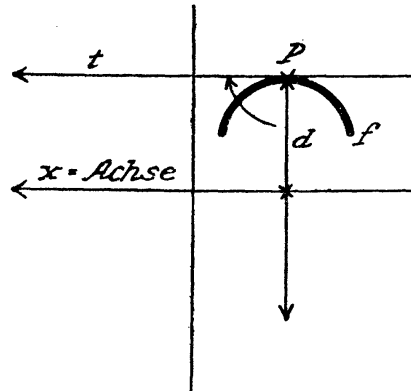


Fig. 8.

unterscheidet auch unsere Polargeometrie zwei Größengebiete, die einander in die Quere zu kommen scheinen, es aber trotzdem nicht tun, weil sie ganz heterogenen Denkreihen angehören. Sie unterscheidet den Prozeß des Elementarwinkels von 90 bis 0 Grad, und den Prozeß des fernliegenden Parallelenschnittwinkels ebenfalls von 0 bis 90 Grad. Für die elementare Betrachtung bleibt aber der Parallelenschnittwinkel, welche reale Größe er auch immer haben mag, der Winkel des elementaren Minimums, also der elementaren Nullgröße.

Die Polargeometrie verhält sich demnach zur euklidischen Geometrie ähnlich wie die höhere Analysis zur Elementararithmetik. Es wäre verfehlt, ihre Konsequenzen zu fürchten.

Die Doppelrolle des unendlich fernen Winkels dürfte sogar ein gutes Hilfsmittel abgeben, um die Grundwahrheit der Differentialrechnung, daß eine elementare Nullgröße von einem anderen Standpunkte aus eine bestimmte Größe zwischen Null und Unendlich haben kann, in einer besonders anschaulichen Weise deutlich zu machen.

Da die hier berührte Frage besonders für die vermutlichen Gegner dieses Buches von Belang sein dürfte, sei sie mit dem Bemerken, daß diese Dinge im folgenden stillschweigend vorausgesetzt werden, nochmals rekapituliert.

Wir unterscheiden:

1. Das endliche Maßgebiet,
2. Das unendliche Maßgebiet.

Im endlichen Maßgebiet gilt das euklidische Axiom, das wir in der Form aussprechen wollen: „Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 2 Rechte.“

Im unendlichen Maßgebiet gilt das Axiom von Riemann und Helmholtz, das hier in der Form mitgeteilt sei: „Die Winkelsumme im Dreieck beträgt mehr als 2 Rechte.“

Beide Maßgebiete mit ihrem respektiven Axiom stören einander durchaus nicht. Eine besondere Überlegung ist nur nötig für den Fall, wo sie gleichsam in Personalunion vorkommen, wenn nämlich eine einzige Dreiecksseite endlich ist, während die beiden anderen unendlich sind, also wenn z. B. in einem rechtwinkligen Dreieck ein zweiter Winkel auch gleich 90 Grad wird. Da entsteht zwischen endlichem und unendlichem Standpunkt folgendes Dilemma:

Vom euklidischen Axiom aus ist der dritte Winkel das Komplement von 90 Grad, also 0 Grad.

Vom Riemann-Helmholtzschen Axiom aus ist der dritte Winkel, wenn die endliche Seite größer als null ist, ebenfalls größer als null.

Dieses Dilemma ist scharf ins Auge zu fassen. Es wird dadurch hervorgerufen, daß in diesem Dreieck der unendliche und der endliche Standpunkt einander widerstreiten, und es wird gelöst, indem man erkennt, daß jeder Standpunkt sein eigenes Axiom hat, das auf ihn allein beschränkt bleibt.

Gegenüber der Hilbertschen Geometrie, die jedem der beiden Axiome eine eigene Geometrie entsprechen läßt und Euklid contra Riemann-Helmholtz setzt, behauptet die Polargeometrie die ergänzende Natur dieser beiden Axiome für die Standpunkte des Endlichen und Unendlichen, verbindet also Euklid cum Riemann-Helmholtz.

Das euklidische Axiom gilt für den endlichen Standpunkt. Daher sind die Lehrsätze der euklidischen Geometrie innerhalb gewisser Maßgrenzen voll berechtigt. (Vgl. § 90.)

Das Riemann-Helmholtzsche Axiom dagegen gilt für den unendlichen Standpunkt. Daher muß die euklidische Geometrie, wenn sie ihren Ameisenhorizont überschreiten will, durch die in diesem Buche gelehrt Geometrie, welche auf der Kugeloberfläche bzw. der Lambertschen Münze demonstriert wird, ergänzt werden. Die Totalität der Ebene und des Raumes wird nur durch letzteren Standpunkt erfaßt.

Die Geometrie als objektive, vollständige und allumfassende Geometrie ist eine Verbindung beider sich ergänzenden Standpunkte, des endlichen und des unendlichen, des Mikro-Standpunktes und des Makro-Standpunktes. Es wäre verfehlt, die Lehrsätze der euklidischen Geometrie für den Mikro-Standpunkt durch andere Lehrsätze zu ersetzen. Es wäre ebenso verfehlt, die Sätze der euklidischen Geometrie auf den Makro-Standpunkt zu übertragen.

Die euklidische Geometrie ist Riemann-Helmholtzsche Geometrie (Kugelgeometrie) für unendlich kleine Kugelhauptkreislängen. Die Riemann-Helmholtzsche Geometrie ist euklidische Geometrie für unendlich große Streckenlängen. Beide Standpunkte stehen in einem gegenseitigen Limes-Verhältnis zueinander.

Erwägt man diese sehr einfachen Dinge in anschaulicher Klarheit, so wird man auch vom Standpunkt der Hilbertschen Axiomatik die gegenwärtige Geometrie verstehen und anerkennen können. Denn so viel ist offenbar: der neue Gedankenkreis hat eine Reihe von Vorteilen, die jedermann in die Augen fallen.

Zum Schluß sei erwähnt, daß der „endliche“ und der „unendliche“ Maßbereich einander kontinuierlich ablösen, so daß eine scharfe Grenze zwischen beiden nicht existiert.

§ 21. Der Beweis des Grundgedankens durch die harmonische Teilung.

Gleichung: $\frac{P_1A}{P_1B} = \frac{P_2A}{P_2B}$. In Worten: Bewegt sich ein Punkt P_1 von A über M nach B, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt

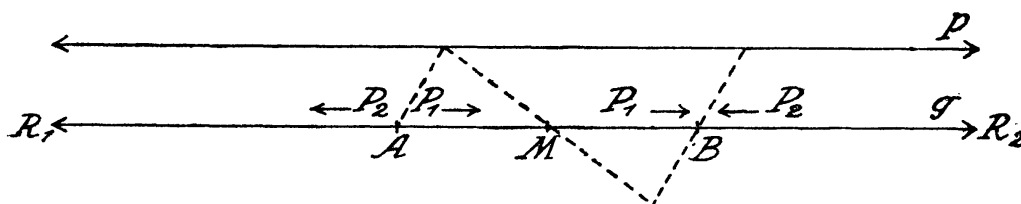


Fig. 9.

P_2 von A in Richtung R_1 und erscheint aus Richtung R_2 , von wo er nach B gelangt. Würden sich nun die Parallelen p und g überhaupt nicht schneiden, so wäre, wenn P_1 in M ist, der Punkt P_2 überhaupt nirgendwo. Denn er wird ja durch die Parallele p auf g konstruiert. Der Punkt wäre also verloren gegangen. Nun können aber in der geometrischen Welt Punkte ebenso wenig verloren gehen wie Atome in der chemischen Welt. Eine solche Auflösung eines existierenden Elementes in Nichts wäre ein Wunder, bei welchem uns der Verstand stillestehen müßte. Damit dieses Wunder nicht angenommen zu werden braucht, hat man also unzweifelhaft festzusetzen, daß die Parallelen p und g sich in bestimmten Punkten schneiden. Ist P_1 im Punkte M , welcher, da er sowohl auf der rechten als der linken Hälfte der Strecke AB liegt, als Doppelpunkt aufgefaßt werden muß, so befindet sich P_2 zugleich in den beiden Punkten, in welchen die Parallele p die Gerade g schneidet. Durch die harmonische Teilung wird auch schon bewiesen, was erst

in den Folgerungen genauer behandelt werden soll, daß die Ebene aus zwei Hälften besteht, deren jede eine logisch selbständige Einheit bildet.

§ 22. Der Beweis des Grundgedankens durch den Apollonischen Kreis.

Der Apollonische Kreis zu dieser Strecke AB im Verhältnis $a : b$ ist derjenige Kreis, der über den beiden harmonischen Teilpunkten der Strecke im Verhältnis $a : b$ geschlagen wird.

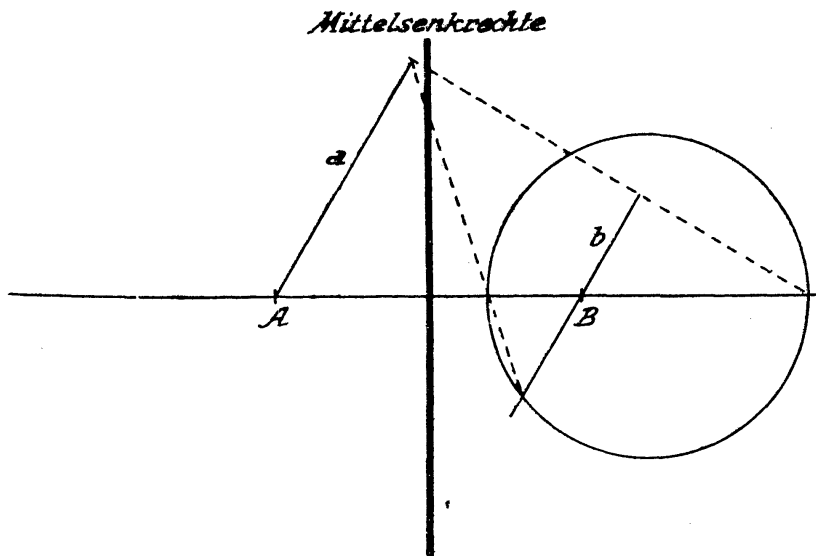


Fig. 10.

Er ist der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstandsverhältnis von A und B konstant, nämlich gleich $a : b$ ist.

Dieser Kreis geht bekanntlich für $a : b = 1 : 1$ in die Mittelsenkrechte der Strecke AB über. Woraus folgt, daß diese Gerade ein Spezialfall der Apollonischen Kreisschar, also selbst ein Apollonischer Kreis, ist. Diese Sache ist so völlig einfach, daß man sich genieren würde, sie anzuführen, wenn sie nicht trotzdem ein klarer Beweis dafür wäre, daß es nicht angängig ist, die Gerade unabhängig vom Begriffe des Kreises zu behandeln. Der Grundgedanke § 1 ergibt sich so mit zwingender Notwendigkeit ganz von selbst.

§ 23. Der Beweis des Grundgedankens durch die Parabel.

Wäre die Ebene endlos, so wäre die Parabel eine fragmentarische Kurve. Sie hätte weder Mittelpunkt noch zweiten Scheitel noch Durchmesser im eigentlichen Sinn. Nun läßt sich aber die Parabel als Grenz-

fall einer Ellipsenschar auffassen und sogar kinematographisch darstellen. Sie läßt sich aus einer sich verwandelnden Ellipse kontinuierlich erzeugen. Bei dieser Verwandlung können nun aber keine konstituierenden Punkte der Kurve in nichts verschwinden. Sondern es muß sowohl der Mittelpunkt als der zweite Scheitel, wenn auch in sehr großer Entfernung auf der Ebene, erhalten bleiben. Denn ihr Verschwinden wäre ein Wunder, welches dem Verschwinden eines chemischen Atomes gleichkäme. Da dies nicht sein kann, hat auch eine Parabel reellen Mittelpunkt und zweiten Scheitel sowie reelle Durchmesser. Das aber kann nur sein, wenn Parallelen sich in reellen Punkten schneiden und die Ebene also nicht endlos und unzurechnungsfähig ist.

§ 24. Beweis des Grundgedankens aus der symmetrischen Entsprechung von Ellipse und Hyperbel.

Es wird allgemein zugegeben, daß Ellipse und Hyperbel als einander in logischem Sinn symmetrisch entsprechende Kegelschnitte aufzufassen sind, was durch die Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ genugsam erläutert wird. Nun läßt sich aber diese Entsprechung nur dann lückenlos durchführen, wenn die Ebene nicht endlos ist. Wäre die Ebene endlos, so würde die oben angegebene Hyperbel die Y-Achse überhaupt nicht schneiden, während die Ellipse bekanntlich auch mit der Y-Achse zwei Schnittpunkte gemeinsam hat.

Ist aber die Ebene in sich selbst geschlossen wie eine Kugeloberfläche, so hat auch die Hyperbel zwei Schnittpunkte mit der Y-Achse, nur liegen diese auf der „unendlich“ weit entfernten Hälfte der Ebene¹⁾. Sowohl Ellipse als Hyperbel haben unter dieser Voraussetzung vier Schnittpunkte mit dem Achsenkreuz, nämlich zwei mit der X-Achse und zwei mit der Y-Achse. Bei der Hyperbel liegen die beiden letzteren Schnittpunkte nur auf der „unendlich“ fernen Hälfte der Ebene. Obwohl diese Verhältnisse erst in den Folgerungen ausführlich zur Darstellung gelangen, dürfte doch schon durch diese kurzen Feststellungen deutlich geworden sein, daß auch die logische Symmetrie zwischen Ellipse und Hyperbel einen endlosen Verlauf der Ebene nicht gestattet, also ein Beweis für unsern Grundgedanken ist.

¹⁾ Vgl. die Ausführung über das Imaginäre § 62.

§ 25. Beweis des Grundgedankens aus der geforderten Lückenlosigkeit der analytischen Gleichungen.

Jedermann wird die Forderung zugeben, daß nicht nur die Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 - y^2 = r^2$, $x^2 - y^2 = -r^2$, sondern auch die vierte Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$ eines geometrischen Sinnes fähig sein soll. Nun ist dies aber nicht der Fall, wenn die Ebene endlos ist. Unter der letzteren Voraussetzung ist die Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$ schlechterdings nicht geometrisch unterzubringen. Ist dagegen die Ebene wie eine Kugeloberfläche in sich selbst geschlossen, so bedeutet $x^2 + y^2 = -r^2$ den Kreis um den Punkt $\pm \infty$ mit dem Radius r . Diese Festsetzung ist unter der genannten Voraussetzung nicht willkürlich gemacht, sondern mittelst der Hyperbel als notwendig erweisbar, was in den Folgerungen klar gezeigt werden wird. Hier kommt es nur auf die Konstatierung an, daß:

1. die Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$ auf Grund einer endlosen Ebene nicht untergebracht werden kann;
2. diese Gleichung auf Grund einer in sich selbst geschlossenen Ebene einer klaren und notwendigen geometrischen Deutung fähig ist. Woraus hervorgeht, daß nur die letztere Voraussetzung mathematisch berechtigt ist. Gegen Einwände vergleiche man §§ 61 und 62.

§ 26. Beweis des Grundgedankens aus der Symmetrie überhaupt.

Philosophische Erfahrung lehrt, daß alle Wirklichkeit und alles Denken symmetrisch oder polar oder dual geordnet ist. Für Mathematiker diene statt dieser Behauptung der Hinweis, daß der Gedanke der Dualität in der modernen Geometrie immer größere Fortschritte gemacht hat und wohl noch weiter machen wird. Es dürfte also nicht unpassend erscheinen, wenn hier der Kürze wegen auf einen Beweis des philosophischen Prinzips verzichtet und der Leser gebeten wird, es für den Augenblick als berechtigt anerkennen zu wollen.

Gibt man aber zu, daß ein streng duales oder polares oder symmetrisches Geordnetsein zu den Anforderungen eines jeden Wissenschaftsinhaltes gehört, so ist dadurch ein neuer Beweis für die alleinige Richtigkeit unseres Grundgedankens ermöglicht. Denn unter Voraussetzung eines endlosen Raumes kann von einer polaren Struktur desselben gar nicht die Rede sein. Der Raum wäre in diesem Falle

gestaltlos oder amorph, und also im geometrischen Sinne gesetzlos. Ist dagegen die Ebene in sich selbst geschlossen, so ist der Raum bis in alle Einzelheiten polar geordnet. Jedem Raumpunkt entspricht dann ein Gegenpunkt, der von ihm um die Strecke „unendlich“ entfernt ist. Der Raum ist dann nicht mehr amorph, sondern magnetisch oder kristallographisch gebaut. Es ist dies eine Möglichkeit, die interessant genug ist, um für unsern Grundgedanken jedenfalls Sympathie zu erwecken, Aus diesem Grunde nenne ich mein System der Geometrie Polargeometrie.

§ 27. Die B-Kegelschnitte.

Obwohl diese Kegelschnitte keinen neuen Beweis für unseren Grundgedanken darstellen, ist es doch nützlich, sie hier zu erwähnen, weil sie den Beweis aus der Hyperbel (§ 15) und den Beweis aus der harmonischen Teilung (§ 18) verbunden zeigen.

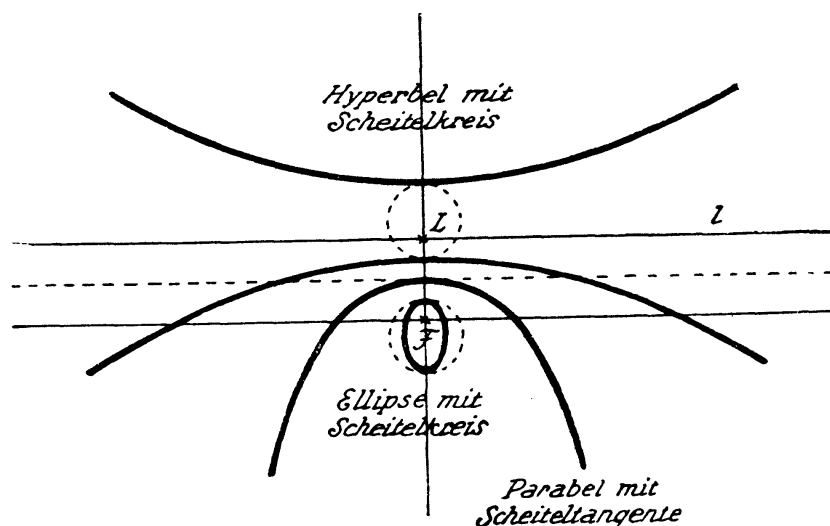


Fig. 11.

Der geometrische Ort für einen Punkt P , der sich so bewegt, daß er von einem festen Punkt F und einer festen Geraden l ein konstantes Abstandsverhältnis $a : b$ besitzt, ist ein B-Kegelschnitt. Die Pole dieses Kegelschnittes teilen die Strecke FL harmonisch, wobei L der Fußpunkt des Lotes von F auf l ist. Für $a < b$ ist der B-Kegelschnitt eine Ellipse, für $a = b$ eine Parabel und für $a > b$ eine Hyperbel. Der Apollonische Kreis im selben Verhältnis $a : b$ ist jedesmal Scheitelkreis an den entsprechenden B-Kegelschnitt.

Man konstruiert beliebig viele Punkte der B-Kegelschnitte in folgender Weise:

Gegeben sei das Parallelenpaar l und X -Achse sowie die Abstandsstrecke LF . Diese heiße b . Auf der X -Achse nehme man einen Punkt H derart an, daß, wenn HF als a bezeichnet wird, das Verhältnis $a : b$ dem Verhältnis des gesuchten B -Kegelschnittes entspricht. Die Gerade LH heiße g .

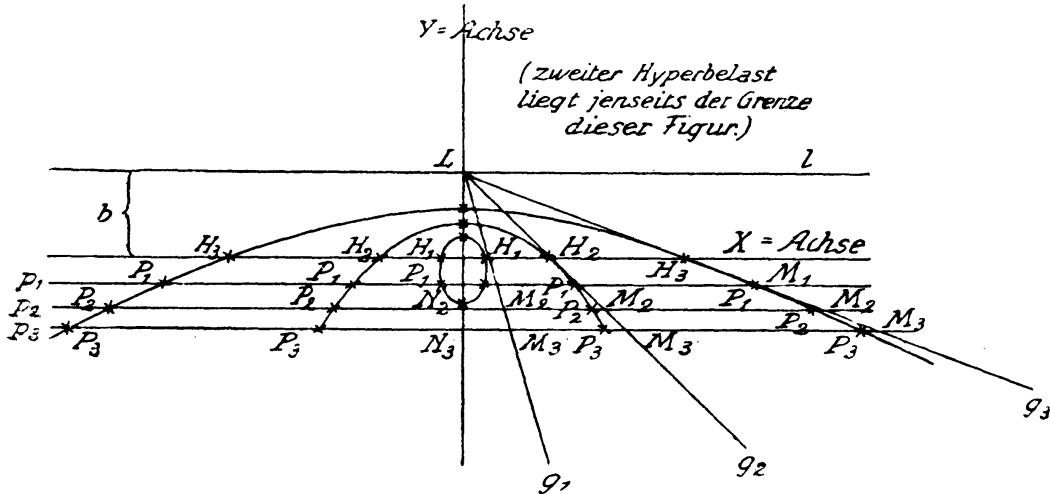


Fig. 12.

Man ziehe nun zu dem gegebenen Parallelenpaar beliebig viele Parallelen $p_1, p_2, p_3 \dots$, welche die Gerade g in den Punkten $M_1, M_2, M_3 \dots$ und die durch LF bestimmte Gerade, welche die Y -Achse ist, in den Punkten $N_1, N_2, N_3 \dots$ schneiden. Man schlage jetzt um F mit den Radien $M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 \dots$ Kreise. Diese treffen ihre respektive Parallele $p_1, p_2, p_3 \dots$ in Punkten $P_1, P_2, P_3 \dots$, welche dem gesuchten Kegelschnitt angehören. Man kann also durch Konstruktion möglichst vieler solcher Punkte den Kegelschnitt konstruieren und zwar, möge er nun eine Ellipse oder Parabel oder Hyperbel sein, immer nach derselben Methode. Diese gemeinsame Punkt-konstruktion der Kegelschnitte dürfte wegen ihrer lehrreichen Einfachheit eines besonderen Interesses wert sein.

Es läßt sich leicht einsehen, daß die Gerade g an den zugehörigen B -Kegelschnitt eine Tangente ist, der besondere Wichtigkeit zukommt. Sie werde daher die Haupttangente des betreffenden Kegelschnittes genannt. Ebenfalls leicht zu zeigen ist, daß die Haupttangente die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, der dazugehörige Kegelschnitt aber die Gleichung $\frac{r}{a} + \frac{y}{b} = 1$ besitzt, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

r ist an dem Kegelschnitt stets die Verbindungsstrecke eines beliebigen seiner Punkte mit F . Die obige Konstruktion beruht darauf, daß das jeweilige x der Haupttangente zum entsprechenden Radiusvektor r des Kegelschnittes gemacht wurde. Der Reichtum der B-Kegelschnitte an schönen, einfachen Beziehungen wird ihren Wert nicht gering einschätzen lassen. Es bleibt nachzutragen, daß eine andere Gruppe von B-Kegelschnitten entsteht, wenn man die Rollen der X -Achse und Y -Achse vertauscht. Dann handelt es sich um die Haupttangente $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und um die Kegelschnitte $\frac{x}{a} + \frac{r}{b} = 1$, wobei wieder $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

§ 28. Widerlegung eines Einwandes durch die Erfahrung.

Vielleicht der wichtigste Punkt dieses Buches ist die Definition VIII in § 11, durch welche die Gerade als Grenzfall eines Kreises hingestellt wird. Durch diese Definition wird der wesentliche Unterschied, den die Sprache und das naive Bewußtsein zwischen „Gerade“ und „Kreis“ machen, als ganz unwesentlich behauptet, und es werden beide Linien zusammengefaßt als „Kurven mit konstantem Krümmungsmaß“. Ist das konstante Krümmungsmaß von Null verschieden, so spricht man von Kreisen. Ist dagegen das konstante Krümmungsmaß gleich Null, so spricht man von Geraden. Alle Kurven konstanten Krümmungsmaßes haben jedoch dieselben gegenseitigen Eigenschaften, nämlich diejenigen, die wir in der Erfahrung an Kreisen feststellen.

Es ist verständlich, daß gerade an diesem Hauptpunkt auch die erste Kritik einsetzt. Man behauptet nämlich in einigen Teilen des Publikums, daß der Unterschied von Gerade und Kreis eben doch wesentlich sei, und daß es nicht möglich sei, aus einem Kreise lediglich durch Verminderung der Krümmung eine wirkliche Gerade zu erzeugen. Vermindert man, so sagen diese Kritiker, die Krümmung eines Kreises immer mehr, so wird der Kreis zwar bis zu einem gewissen Werte flacher, kann aber den Grenzfall der absolut ungekrümmten Geraden grundsätzlich nicht erreichen. Die Gerade ist dem Prozeß des sich vergrößernden Kreises transzendent.

Bevor der Einwand logisch analysiert wird, sei hier gezeigt, daß er nicht der Erfahrung gemäß ist. Krümmt man einen elastischen Stock zu einem Kreisbogen und vermindert dessen Krümmung immer

mehr, so flacht er sich schließlich vollständig ab und wird zur geraden Linie, die man sogar in derselben Richtung wieder zum Gegenkreise fortbiegen kann. In der Erfahrung ist also die Gerade durchaus ein Spezialfall einer Kreisschar, und dem Kreisprozeß keineswegs transzendent. Was aber in der Erfahrung wirklich ist, muß auch in der Mathematik zutreffen, da ja die Geometrie nach § 10 die Wissenschaft von den räumlichen Ideen der Erfahrung ist.

Die Widerlegung des gegebenen Einwandes durch die Erfahrung ist die gründlichste, die denkbar ist. Wo die Erfahrung das Schiedsrichteramt übernimmt, haben alle entgegenstehenden Meinungen zu schweigen, und man könnte also damit den soeben gehörten Einwand sich selbst überlassen. Doch da er eine gewisse Hartnäckigkeit im Denken besitzt, soll er auch logisch widerlegt werden.

§ 29. Nachweis der unendlich nahen Annäherung des Kreises an die Gerade.

Zunächst sei derjenige Standpunkt kritisiert, welcher überhaupt leugnet, daß ein sich vergrößernder Kreis auf ein beliebig flaches Maß gebracht werden kann, daß er also der Geraden bis zu beliebiger Vollständigkeit angenähert werden kann.

Sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und t seine Tangente im Punkte B . s_1 und s_2 seien Sekanten durch den Kreis, welche mit dem Berührungsradius BM parallel verlaufen und zu ihm symmetrisch sind. Sie schneiden den Kreis auf der der Tangente zugekehrten Seite in den Punkten 1 und $1'$. Sie schneiden die Tangente selbst in den Punkten ∞ und ∞' .

Es ist nun klar, daß man zwischen den Kreis k und die Gerade t beliebig viele Kreise einschalten kann, welche noch flacher sind als der gegebene Kreis k . Von keinem Kreise k kann also jemals behauptet werden, daß er der flachstmögliche sei. Sondern das Maximum der Abflachung ist erst bei der Geraden t selbst erreicht.

Folglich nähert sich ein Kreis bei seiner Abflachung unendlich nahe an eine Gerade an.

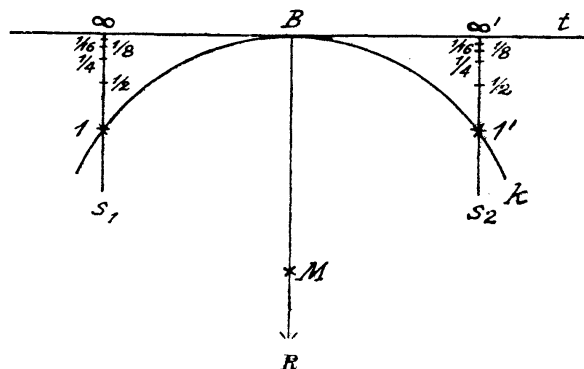


Fig. 13.

§ 30. Nachweis der Identität dieses Annäherungsproblems mit dem eleatischen Pfeilproblem.

Ob nun unter Voraussetzung dieser Einsicht der sich abflachende Kreis die Gerade selbst zu erreichen imstande ist, oder ob er nur auf eine unendlich kleine Differenz sich ihr annähert, bleibt nach wie vor ein Problem. Zwar ist dieses schon in § 28 gelöst worden, doch soll hiervon jetzt abgesehen werden. Dann ist leicht zu zeigen,

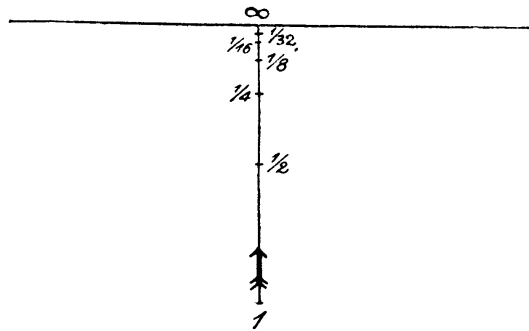


Fig. 14.

daß dieses Problem kein anderes ist als dasjenige der Eleaten, das sie zu dem Sophisma vom fliegenden Pfeil umformten

Es lautet: Fliegt ein Pfeil von einem Punkte 1 aus nach einer festen Wand, die wir mit dem senkrechten Treffpunkt ∞ bezeichnen wollen, so kann

er diese Wand gar nicht erreichen. Denn er muß zuerst eine Hälfte, dann ein Viertel, dann ein Achtel, dann ein Sechzehntel usw. der ganzen Strecke zurücklegen. Da nun diese geometrische Reihe offenbar endlos ist, so ist es nach diesem Sophisma unmöglich, daß der Pfeil jemals den Punkt ∞ auf der festen Wand erreicht.

Es kann nun nicht bezweifelt werden, daß dieses alte Pfeilproblem mit dem Annäherungsproblem § 29 identisch ist. Je zwei gleichgelegene Teilpunkte der Strecken 1∞ und $1' \infty'$ determinieren nämlich zusammen mit B einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden BM jenseits von M liegt. Sowohl beim Pfeilproblem als beim Kreisproblem handelt es sich also um die fortlaufende Teilung einer Strecke 1∞ nach Maßgabe der geometrischen Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ usw. Und es fragt sich in beiden Fällen, ob diese Reihe vermögend ist, den Endpunkt der Strecke schließlich zu erreichen oder nicht. Die Erfahrung zeigt, daß das Ziel erreicht werden kann. Der reine Verstand behauptet notwendig das Gegenteil. Obwohl es ganz klar ist, daß in solchen Fällen die Erfahrung recht und der reine Verstand unrecht hat, ist es von philosophischem Interesse, sich darüber Licht zu verschaffen, wodurch eigentlich die Diskrepanz zwischen arithmetischem Verstand und geometrischer Erfahrung verursacht wird.

§ 31. Erklärung des erkenntnistheoretischen Zwiespaltes durch das Bergsonsche Prinzip.

Während die unmittelbare Erfahrung kontinuierlich verläuft, setzt der Verstand innerhalb des Kontinuums bestimmte Einschnitte fest, welche er zählt. Die Arithmetik und ihre höheren Fortbildungen sind demnach die eigentlichen Wissenschaften des reinen Verstandes, während der Geometrie ein sehr wesentliches empirisches Element innewohnt, das durch algebraisches Denken niemals erfaßt zu werden vermag. Für den reinen Verstand ist jedes geometrische Kontinuum ein endloser Ozean von Möglichkeiten, innerhalb dessen sich endlos viele Einschnitte nach Belieben annehmen lassen. Der reine Verstand ist recht eigentlich das Vermögen der Haarspalterei, welches mehr dazu geeignet ist, die Natur unverständlich zu machen, als sie zu erkennen. Zur Naturerkenntnis führt nur die unmittelbare Einsichtnahme, welche man altmodischerweise mit dem Worte „Erfahrung“ bezeichnet.

Für die Geometrie ergibt sich daraus die Lehre, daß ihre untersten Fundamente nicht auf dem reinen Verstand, sondern auf der reinen Erfahrung gegründet sein müssen, wenn sie haltbar und frei von unwillkürlicher Sophistik sein sollen. Diese empirische Methode der geometrischen Grundlegung wird in dem vorliegenden Buche befolgt.

§ 32. Die Bewegung des Mittelpunktes im Annäherungsprozeß.

Der Verfasser glaubt sich nunmehr auf den Standpunkt stellen zu sollen, daß die Tatsache des kontinuierlichen Übergangs zwischen Kreis und Gerade allgemein anerkannt wird, und er bittet den Leser, seine Aufmerksamkeit jetzt dem Mittelpunkt M des Kreises zuzuwenden (Fig. 13).

Dieser Mittelpunkt bewegt sich, wenn der Kreis unter Festhaltung des Punktes B und der Tangenten t abgeflacht wird, in der Richtung R geradlinig vorwärts. Er wird sich, wenn die Peripherie gleichmäßig in arithmetischer Progression an die Gerade herangeführt wird, mit stark beschleunigter Geschwindigkeit bewegen. Je näher die Peripherie der Geraden kommt, desto rasender wird seine Geschwindigkeit. Bei alledem ist aber die Hauptsache, daß der Punkt sich in jedem Moment des Prozesses an einer bestimmten Stelle der Ebene