

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR1507

UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1

010: : |a 20019223

035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B50223

035/2: : |a (CaOTULAS)160122834

040: : |c NIC |d NIC |d MiU

050/1:0 : |a QA681 |b .B3

100:1 : |a Barthel, Ernst, |d 1890-

245:10: |a Polargeometrie, |c von Dr. Ernst Barthel. Mit 23 Figuren.

260: : |a Berlin, |b L. Simion nf., |c 1919.

300/1: : |a 95 p. |b diagrs. |c 23 cm.

440/1: 0: |a Bibliothek für Philosophie |v 16 Bd

650/1: 0: |a Geometry |x Foundations

998: : |c RSH |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Polargeometrie.

Von

Dr. Ernst Barthel.

Mit 23 Figuren.

Preis 4,50 M.



BERLIN

W 57, Bülowstraße 56

Druck und Verlag von Leonhard Simion Nf.

1919

Inhalt.

	Seite
Vorwort	7
Pädagogischer Brief	9
I. Der Grundgedanke und seine Beweise.	
§ 1. Der Grundgedanke	11
§ 2. Eine Kritik	12
§ 3. Gegner des Grundgedankens	13
§ 4. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Euklids . . .	13
§ 5. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Hilberts . .	14
§ 6. Die Theorie Geißlers	14
§ 7. Zwei Wege der Grundlegung der Geometrie	15
§ 8. Axiom und Definition	16
§ 9. Die objektive Geometrie als logisch mögliche Geometrie	16
§ 10. Die Definitionen der Geometrie im Verhältnis zur Erfahrung . .	17
§ 11. Die dreizehn Definitionen der objektiven Geometrie	17
§ 12. Deduktion der Eigenschaften von Parallelen	20
§ 13. Ebener Beweis für den Grundgedanken	20
§ 14. Deduktion der Parallelschnittpunkte aus dem Kontinuitätsprinzip	21
§ 15. Ursache des euklidischen Irrtums.	22
§ 16. Verhältnis der euklidischen Täuschung zur modernen Grund- legung der Geometrie	23
§ 17. Der Beweis des Grundgedankens durch die Hyperbel	23
§ 18. Der Beweis des Grundgedankens durch den Satz von Pascal . . .	24
§ 19. Der Beweis des Grundgedankens durch die trigonometrische Tangente	25
§ 20. Auflösung eines trigonometrischen Paradoxons	26
§ 21. Der Beweis des Grundgedankens durch die harmonische Teilung . .	30
§ 22. Der Beweis des Grundgedankens durch den Apollonischen Kreis . .	31
§ 23. Der Beweis des Grundgedankens durch die Parabel	31
§ 24. Beweis aus der symmetrischen Entsprechung von Ellipse und Hyperbel	32
§ 25. Beweis aus der geforderten Lückenlosigkeit der analytischen Gleichungen	33
§ 26. Beweis aus der Symmetrie überhaupt	33
§ 27. Die B-Kegelschnitte	34
§ 28. Widerlegung eines Einwandes durch die Erfahrung.	36
§ 29. Nachweis der unendlich nahen Annäherung des Kreises an die Gerade	37
§ 30. Nachweis der Identität dieses Annäherungsproblems mit dem elea- tischen Pfeilproblem.	38
§ 31. Erklärung des erkenntnistheoretischen Zwiespaltes durch das Bergsonsche Prinzip	39

	Seite
§ 32. Die Bewegung des Mittelpunktes im Annäherungsprozeß . . .	39
§ 33. Eine auffällige Weg-Zeitgleichung	40
§ 34. Beseitigung eines durch die Vorstellungstendenz veranlaßten Hindernisses	41
§ 35. Beseitigung eines analytischen Einwandes	42
§ 36. Beseitigung eines Einwandes der projektiven Geometrie	43
§ 37. Das Gesetz von der Erhaltung der geometrischen Elemente . .	44
§ 38. Die Insichgeschlossenheit von Gerade, Ebene und Raum	45
§ 39. Die mathematische Fruchtbarkeit der Polargeometrie	45
§ 40. Die raumtheoretisch-astronomische Fruchtbarkeit der Polar- geometrie	46

II. Mathematische Folgerungen.

A. Planimetrischer Teil.

§ 41. Der definite Unendlichkeitsbegriff der Polargeometrie	46
§ 42. Der indefinite Unendlichkeitsbegriff der euklidischen Geometrie	47
§ 43. Dührings Analyse des Unendlichkeitsbegriffes	48
§ 44. Dührings Gesetz der bestimmten Anzahl	49
§ 45. Der algebraische Unendlichkeitsbegriff	50
§ 46. Die Verwandtschaft zwischen dem algebraischen und dem geo- metrischen Unendlichkeitsbegriff	51
§ 47. Die Kugeloberfläche als Anschauungsmittel der objektiven Plani- metrie	52
§ 48. Die Orientierung auf dem Globus	52
§ 49. Annahme einer endlichen Maßeinheit und Feststellung der Ko- ordinatenbezeichnung	53
§ 50. Demonstrierung der Paralleleigenschaften auf der Kugel . . .	54
§ 51. Die Gleichung der Geraden	54
§ 52. Die Gleichung der Parallelen zu einer Achse und die Gleichung des Ebenenäquators	55
§ 53. Der Verlauf der Hyperbel	56
§ 54. Die konjugierte Hyperbel derselben Normalstellung als Gegen- hyperbel der ursprünglichen	57
§ 55. Bemerkung über die allgemeine Hyperbel	58
§ 56. Die Darstellung der Totalebene durch die Lambertsche Münze .	59
§ 57. Darstellung des Verlaufes einer gleichseitigen Hyperbel auf der Lambertschen Münze	60
§ 58. Der Verlauf der Parabel und seine Darstellung	61
§ 59. Eine neue Eigenschaft der Parabel	63
§ 60. Konstruktion des Ausdruckes $\sqrt{2p \cdot \frac{\infty}{2}}$	65
§ 61. Ellipse und Gegenellipse	66
§ 62. Näheres über die Gleichung $x^2 + y^2 = -r^2$	66
§ 63. Empfehlung der Benutzung einer Kugel	68
§ 64. Ellipse, Parabel und Hyperbel in ihrem Zusammenhang	69
§ 65. Die Gerade als Grenzfall von Ellipse, Hyperbel und Parabel . .	70
§ 66. Das wesentliche Verhältnis von Gerade, Kreis und Punkt . . .	71
§ 67. Die Arcusfunktion	71
§ 68. Das Paradoxon der scheinbaren Linearität einer Gleichung von Kur- ven zweiten Grades	73
§ 69. Das reziproke Verhältnis zwischen unendlichem Radius und un- endlicher Peripherie	74

B. Stereometrischer Teil.

	Seite
§ 70. Kegel und Zylinder	75
§ 71. Die Zylinderschnitte	76
§ 72. Das räumliche Strahlenbüschel	76
§ 73. Der Begriff des Raumes	77
§ 74. Ein Gesetz der Raumbewegung	78
§ 75. Die Zwillingsgeraden	78
§ 76. Windschiefe Geraden eines Raumes	79
§ 77. Die Schnittlinie zweier Ebenen	80
§ 78. Die Mehrzahl der Räume	80
§ 79. Die Logarithmen negativer Zahlen	81
§ 80. Die Dimensionenzahl des Raumes	82
§ 81. Die Reversionskugel als mathematisches Modell des Raumes	83
§ 82. Die geradlinige Bewegung eines Punktes durch den Raum, ohne Modell angegeben	85
§ 83. Dieselbe Bewegung des Punktes in Modell demonstriert	85
§ 84. Angabe der drei Raumkoordinaten eines Punktes im Modell	86
§ 85. Eigenart des Raumkörpers	87
§ 86. Die Zeit als Grundbegriff der Polargeometrie	88
§ 87. Die tiefere Ursache der Unvorstellbarkeit der unendlichen Totalität	89
§ 88. Logik, Ethik und Geometrie als die apriorischen Wissenschaften	90
§ 89. Bedeutung des Gesetzes der Erhaltung der geometrischen Elemente für die Polargeometrie	91
§ 90. Die Bedeutung der Lehrsätze der euklidischen Geometrie innerhalb der Polargeometrie	92
§ 91. Die Dreiteilung eines Winkels	93
§ 92. Berechnung des Rauminhaltes in beliebigen Kubikeinheiten	93
§ 93. Empirischer Charakter der Polargeometrie	95

Vorwort.

Nach einer Reihe von Vorarbeiten in Prof. Dr. Steins „Archiv für systematische Philosophie“ 1916 ff. gebe ich hiermit die ausführliche Darstellung meiner als objektiv erkannten Polargeometrie. Ich tue es im Gedenken an Robert Mayer und im Bewußtsein einer Pflicht.

Zeitschriften werden gebeten, das Buch mit der Korrektheit zu behandeln, die man einer redlichen Sache entgegenbringt. Bericht-erstatte werden gebeten, sich der Einsicht, daß das Buch mit zureichender Kenntnis der Ergebnisse der heutigen Mathematik geschrieben ist, nicht zu verschließen. Die geneigten Leser aber werden gebeten, das Buch mit ihrer eigenen Urteilskraft zu durchdenken.

Der Name Polargeometrie erklärt sich daraus, daß nach diesem System jedem Raumpunkt— im „Unendlichen“ ein ebenso bestimmter Raumpunkt entspricht, so daß also der Raum eine polare, d. h. symmetrische oder dualistische, Struktur aufweist.

Schiltigheim bei Straßburg i. E., Ostern 1918.

Ernst Barthel.

Pädagogischer Brief.

Herrn Prof. Dr. C. H., München.

Sie schreiben mir, daß Ihnen, obwohl ich noch nicht Ihre persönliche Bekanntschaft gemacht habe, meine Polargeometrie wie Ihre eigene Sache am Herzen liege, und daß Sie gesonnen seien, deren elementare Inhalte in Ihren Mathematikklassen praktisch durchzuarbeiten. Nichts könnte mir erfreulicher sein, als daß ein anderer Mathematiker das System in pädagogischer Breite vorträge. Liegen doch auch hier die entscheidenden Punkte der wissenschaftlichen Lehre in den einfachsten Grundlagen, und es dürfte nicht ausbleiben, daß Ihre Schüler, wie Sie selbst es getan haben, die Wahrheit und Schönheit der Polargeometrie sowie deren Überlegenheit für das Verständnis des geometrisch „Unendlichen“ erkennen. Die Schüler können unbedenklich mit der Polargeometrie bekannt gemacht werden, da sie den sicheren Teilen der allgemein verbreiteten Lehre in keiner Weise widerspricht, sondern nur eine besondere Akzentuierung der Dinge neu einführt, aus welcher eine Vereinfachung hervorgeht.

Da mein Buch nicht unmittelbar in pädagogischer Absicht verfaßt ist, möchte ich mir erlauben, Sie auf die Paragraphen zu verweisen, die in der Schule von Wert sein dürften. Man wird dieselben den Schülern in einfachster Breite ausführen und wohl auch eine straffere Systematik im Sinne der gebräuchlichen Schulbücher eintreten lassen. Ausgangspunkt bleibt immer der Satz: „Geometrie gründet sich nicht auf logische, sondern auf geometrische Grundlagen, d. h. auf die einfachsten geometrischen Anschau-

ungen und Prozesse. Die Logik ist nur das Hilfsmittel der Geometrie, nicht deren Grundlage“. Daraufhin folgen sogleich die dreizehn Definitionen des § 11 und die Deduktion der Paralleleigenschaften. Wenn die Parallelenfrage in Quarta nach Riemann-Helmholtz statt nach Euklid gelöst wird, ist der Boden für die später zu erlernende projektive Geometrie schon vorbereitet, und der Schüler bleibt mit den inneren Widersprüchen, zu denen der euklidische Standpunkt führt, verschont. Die reichliche Verwendung von Anschauungsmaterial (Kugel und Lambertsche Münze) ist im Text empfohlen. Die Auswahl des Stoffes für die verschiedenen Klassen möchte ich Ihnen selbst überlassen. Es dürfte von Quarta bis Prima jede Stufe irgendwie mitbeteiligt sein.

Die pädagogisch in Betracht kommenden Paragraphen sind folgende: §§ 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 89, 90, 91.

Um Polemik und andere Theorien wird man sich in der Schule grundsätzlich nicht kümmern, außer in dem einen Falle, wo man den Schülern mitteilt, daß Euklid eine Parallelenlehre aufgestellt hat, nach welcher es in einer Ebene nichtschneidende Gerade gibt, daß er also die Analogie und Kontinuität zwischen Kugelhauptkreisen und Geraden noch nicht ahnte. Man kann den Schülern weiter mitteilen, daß die Annahme Euklids von parallelen Geraden, die einander überhaupt nicht schneiden, sondern immer gleichen Abstand behalten, im täglichen Sprachgebrauch Fuß gefaßt hat (man spricht von „parallelen“ Eisenbahnschienen, von „parallelen“ Peripherien konzentrischer Kreise usw.), und daß auch die Wissenschaft die Theorie Euklids bis vor kurzem noch nicht preisgegeben hatte, sondern an diese Theorie komplizierte logische Untersuchungen anknüpfte, von denen aber nur gesagt wird, daß wir ohne sie auskommen. E. B.

I. Der Grundgedanke und seine Beweise.

§ 1. Der Grundgedanke.

Die innere Konsequenz der Geometrie erfordert gebieterisch, daß die euklidische Parallelenlehre auf Schulen und Universitäten mit aller Deutlichkeit als objektiv unzutreffend preisgegeben und ersetzt werde durch eine an Desargues und Riemann anknüpfende neue Parallelenlehre.

Die euklidische Parallelenlehre definiert Parallelen als einander nichtschneidende Geraden einer Ebene.

Die neue Parallelenlehre, welche in der projektiven Geometrie vorgebildet ist¹⁾, faßt dagegen die Ebene als Grenzwert einer Kugelschar auf, lehrt also, daß nichtschneidende Geraden einer Ebene nicht existieren können. Nach ihr haben je zwei Geraden einer Ebene wie zwei Hauptkreise einer Kugel zwei reelle Schnittpunkte.

In der Lehre Euklids besteht zwischen den Punkten 0 und ∞ der analytischen Geometrie ein Wesensunterschied. 0 ist ein bestimmter Punkt, ∞ ist ein unbestimmter Punkt, liegt immer noch weiter entfernt als jeder angebbare bestimmte Punkt der Ebene.

In der hier gebotenen Lehre dagegen besteht zwischen den Punkten 0 und ∞ volle Gleichartigkeit und Gleichberechtigung. Beide sind bestimmte Punkte der Ebene. Unbestimmte Punkte gibt es überhaupt nicht, sind ein Widerspruch in sich selbst. Der Punkt $\pm \infty$ hat alle geometrischen Eigenschaften eines beliebigen anderen Punktes der Ebene, zum Beispiel des Punktes ± 0 . Man kann von ihm aus die Richtungen nach rechts, links, oben, unten, vorn und hinten unterscheiden. Man kann durch ihn ein Strahlenbüschel legen. Man kann

¹⁾ Desargues und die projektive Geometrie vertreten implizite einen antieuklidischen Standpunkt. Sie sprechen nicht ausdrücklich aus, aber betätigen, daß es nichtschneidende Geraden einer Ebene nicht gibt.

sich am Punkte $\pm \infty$ stehend denken, wie man sich am Punkte ± 0 stehend denken kann.

Die niedere und höhere Mathematik erkennt längst an, daß die Größen ± 0 und $\pm \infty$ einander in jeder Hinsicht reziprok entgegengesetzt und gleichberechtigt sind. Die hier gebotene geometrische Lehre ist nichts weniger als ein Umsturz der bestehenden Errungenschaften, sondern lediglich eine Ausscheidung unwissenschaftlicher Einsprengungen in die bisherige Lehre. Die Geometrie wird erst voll und ganz exakte Wissenschaft, wenn die Endlosigkeitsnebel, die man bisher noch an ihrem Horizont bemerkte, bis auf den letzten Rest vertrieben werden. Die Tendenz, alles Indefinite aus der Geometrie zu verbannen, wird man, wie immer man sich zum Inhalt des Systems stellen mag, als eine Bestrebung anerkennen müssen, die dem Lauf der modernen Entwicklung konform geht.

§ 2. Eine Kritik.

Der Mathematiker, der diese Dinge liest, fühlt sich im ersten Augenblick zu dem Urteil bewogen, daß der Gedanke längst dagewesen sei. Vorliegendes Buch wäre in diesem Falle, wie es scheint, überflüssig. Doch ist die Kritik aus folgenden Gründen unmöglich.

Es ist natürlich richtig, daß der Inhalt des Buches nicht in dem Sinne neu ist, daß er in der seitherigen Entwicklung der Mathematik gar keine Anknüpfungspunkte besäße. Im Gegenteil gibt das Buch einem Gedanken eine eigenartig konsequente Wendung, der in der neueren Geometrie langsam herangekeimt ist und in sporadischer Form jedem Mathematiker bekannt war. Daß die Ebene der Grenzwert einer Kugeloberfläche ist, braucht der Welt nicht mehr als Neuigkeit verkündet zu werden.

Aber das Buch will auch etwas ganz anderes. Es will die Unvereinbarkeit dieses Gedankens mit der euklidischen Geometrie deutlich machen. Es will ferner die Unerläßlichkeit des Gedankens dazu benutzen, die Vielheit der logisch möglichen Geometrien auf eine einzige geometrisch mögliche Geometrie zu reduzieren. Es will schließlich auch die Konsequenzen aus dem Gedanken ziehen, die, so nahe sie liegen, niemals gezogen worden sind, weil sich die Aufmerksamkeit der Mathematik nicht mit geeigneter Stärke

auf den wichtigen Punkt konzentrierte, und das wahrscheinlich deshalb, weil er so einfach ist.

Die Berechtigung dieses Buches wird bewiesen:

a) Durch die Tatsache, daß auf den Schulen noch die nachweislich falsche Parallelenlehre Euklids gelehrt wird.

b) Durch die Tatsache, daß die geometrische Grundlagenforschung bei einer Vielheit von logisch möglichen Geometrien stehen zu bleiben lehrt und sich also jeder Aussage über die objektiven Eigenschaften des Raumes enthält.

c) Durch die Tatsache, daß die mathematischen Einzelfolgungen aus dem Gedanken noch niemals ausgesprochen worden sind.

§ 3. Gegner des Grundgedankens.

Dieser Grundgedanke ist im folgenden ausführlich zu beweisen und gegen Andersdenkende in Schutz zu nehmen. Als Gegner kommen in Betracht:

1. Die zahlreichen Anhänger der euklidischen Parallelenlehre, die etwa durch Eugen Dühring repräsentiert sein mögen. Ein Teil von ihnen ist der Ansicht, daß die neue Parallelentheorie gegen feststehende Grundwahrheiten der Analytik und der projektiven Geometrie verstoßen würde.

2. Die Vertreter der modernen geometrischen Grundlagenforschung, als deren Repräsentant Hilbert gelten möge. Diese halten auf Grund vermeintlicher logischer Erfordernisse jede objektive Eindeutigkeit in der Geometrie für unmöglich.

§ 4. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Euklids.

Unter den „Anhängern Euklids“ verstehe ich Mathematiker, die die nichteuklidischen Geometrien als wertlose Scholastik betrachten, das euklidische System also für einzig richtig halten. Der Verfasser darf bestimmt hoffen, daß er diese Gruppe durch die Wucht seiner Gründe für den neuen Standpunkt gewinnen wird. Denn es handelt sich um klare Sachverhalte, die dazu nötigen, daß man die euklidische Parallelenlehre mit der neuen vertausche, und zwar nicht bloß nebenbei, sondern überall und grundsätzlich.

§ 5. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Hilberts.

Unter den „Anhängern Hilberts“ verstehe ich Mathematiker, die die Gleichberechtigung der drei logisch möglichen Geometrien lehren, sich also jeder sachlichen Bevorzugung eines der drei Systeme enthalten. Man hätte sie ebenso gut als Anhänger Liebmanns, Poincarés, Couturats bezeichnen können. Sie vertreten die jetzige Hauptströmung.

Diese Gruppe von Gegnern wäre enttäuscht, wenn die Vielheit der „logisch einwandfreien Geometrien“, wie sie durch Euklid, Lobatschewsky-Bolyai, Klein-Clifford, Riemann-Helmholtz geschaffen worden sind, zu einer einzigen objektiv eindeutigen Geometrie reduziert werden würde.

Daß das Problem wichtig ist, bezweifelt in diesem Kreise niemand. Wellstein (Enzyklopädie Bd. II S. 131) spricht der Frage der objektiven Eindeutigkeitsgeometrie eine „gewaltige Tragweite“ zu. Irgend eine begründete Stellungnahme dieser Gruppe zu dem neuen Lösungsversuch wäre wünschenswert, weil sich diese Gedanken dem menschlichen Geiste doch immer wieder aufdrängen werden. Die sachliche Überlegenheit der Riemann-Helmholtzschen Geometrie über die andern „logisch möglichen“ Geometrien dürfte nach den Ausführungen dieses Buches keinem Zweifel mehr unterliegen. Vgl. hier auch schon § 20.

§ 6. Die Theorie Geißlers.

Dr. Kurt Geißler vertritt in mehreren Büchern eine Theorie, die sich weder zu den Hilbertschen Grundlagen, noch ohne weiteres zu Euklid bekennt. Der Verfasser stellt die Lehre auf, daß für die gewöhnliche „Weitenbehaftung“, d. h. Maß-Sphäre, die euklidische Geometrie im Rechte sei, während für eine Weitenbehaftung höherer Ordnung die Lobatschewskysche Annahme eines ganzen Büschels Nichtschneidender Geltung habe. Dieser Standpunkt dürfte folgender Kritik unterliegen:

1. Geißler nimmt in der Geometrie eine Endlosigkeit an, ohne alle elementarlogischen Kriterien befragt zu haben, ob das zulässig ist. Unser Buch dagegen fragt sich, ob man auf Grund einer klaren Logik berechtigt ist, nichtschneidende Geraden einer Ebene an-

zunehmen. Und es kommt zu dem vielfach begründeten Schluß, daß dies nicht der Fall ist. Daraus ergibt sich der definite Charakter des geometrisch Unendlichen.

2. Die Geißlersche Behauptung, auch der Unterschied von „Gekrümmt“ und „Ungekrümmt“ sei nur relativ und müsse noch durch Angabe der Weitenbehaftung präzisiert werden, scheint mir ein Verstoß gegen die Fundamente der geometrischen Urteilskraft. Entweder ist eine Linie gerade oder krumm, und zwar dies im absoluten Sinne.

§ 7. Zwei Wege der Grundlegung der Geometrie.

Die jetzige Grundlagenforschung führt die Geometrie auf Axiome zurück, d. h. auf eine geringe Zahl nicht beweisbarer, hypothetisch angenommener Voraussetzungen. Diese Axiome werden derart gewählt, daß sie zusammen ein widerspruchsfreies System ermöglichen. Widerspruchsfreiheit ist also das oberste Kennzeichen eines wissenschaftlich berechtigten Systems der Geometrie. Und da es tatsächlich mehrere Geometrien gibt, welche im rein logischen Sinne widerspruchsfrei sind, so folgt für diesen Standpunkt, daß nicht ausgemacht werden kann, welche Geometrie objektiv zu Recht besteht.

Es gibt aber einen zweiten Weg der geometrischen Grundlegung der bisher vernachlässigt wurde und hier besprochen werden wird. Er geht nicht von willkürlich gewählten Axiomen aus, sondern von einer geringen Anzahl von Definitionen, welche dem Sprachgebrauch entsprechen und sich mit den durch sie gemeinten objektiven Denk- und Vorstellungsinhalten in kongruenter Weise decken.

Aus den denkwürdigen Definitionen der geometrischen Fundamentalgrößen werden alle geometrischen Schlüsse mit eindeutiger Notwendigkeit gezogen. Auch die Frage nach dem gegenseitigen Verhalten zweier Senkrechten auf derselben dritten Geraden einer Ebene wird auf dem neuen Standpunkt nicht mehr durch Axiome *ad libitum* entschieden, sondern durch klaren geometrischen Schluß eindeutig gefolgert.

Zusammenfassend kann also gesagt werden:

Der logistische, axiomatische, nominalistische, subjektivistische, zur Vieldeutigkeit führende Weg der geometrischen Grundlegung wird vom Verfasser mit vollem Bewußtsein preisgegeben, da er eine solide,

d. h. eindeutige Fundierung der Geometrie nicht erlaubt, und da es einen anderen Weg gibt, der dieses Erfordernis auf das beste erfüllt. Der neue Weg hat im Gegensatz zu dem erstgenannten einen rein geometrischen, definitiven, realistischen, objektiven Charakter und führt zur Eindeutigkeit. Auf Grund der rein formalen, axiomatischen Behandlung der geometrischen Grundlagen wären drei Geometrien möglich. Die Mitberücksichtigung der geometrischen Kontinuität führt aber zu dem Ergebnis, daß unter diesen drei Geometrien eine einzige den Vorzug verdient, nämlich die von Riemann.

§ 8 Axiom und Definition.

Die Axiome, d. h. unbeweisbaren Grundsätze, welche einer Spezialwissenschaft zugrundeliegen, können nur die Voraussetzungen des allgemeinen Menschenverstandes sein, welche niemand im Ernst bezweifelt und auch nur ein Logiker aufzuzählen sich die Mühe machen wird. Statt aller dieser Axiome kann der kategorische Imperativ gelten: *Gebrauche deinen Verstand.* Außer auf dem Verstand beruht jede Spezialwissenschaft nur auf der Erfahrung und auf Definitionen.

Die Polargeometrie beruht auf dreizehn einfachen und unbestreitbar dem Sprachgebrauch entsprechenden Definitionen. Aus ihnen läßt sich das ganze System einschließlich der Paralleleigenschaften folgern, ohne daß man besondere Axiome zu Hilfe nimmt. Daß Euklid sein berühmtes Buch auf Definitionen und auch auf Axiome gründen mußte, ergibt sich aus der mangelhaften Art seiner Definitionen, besonders der Geraden. Die moderne geometrische Entwicklung seit Desargues hat uns über die objektiven Erfordernisse der Geometrie erst die Augen geöffnet. Keinesfalls darf man sich heute Euklids Methode zur dogmatischen Lehre reichen lassen. Man muß vielmehr die Geometrie ohne Axiome, bloß auf Grund von allgemeinverbindlichen Definitionen, neu schaffen. Dies soll im Prinzip hier geschehen.

§ 9. Die Polargeometrie als logisch mögliche Geometrie.

Da der logische Weg der Grundlagenforschung den begründeten Anspruch erhebt, alle logisch möglichen Geometrien aufzählen zu können, so kann ihm auch diejenige Geometrie, welche hier als Polar-

geometrie vorgetragen wird, nicht ganz unbekannt sein. In der Tat hat er in der Riemannschen Geometrie, der sog. elliptischen, ein System erzeugt, das sich in seinen Voraussetzungen mit den objektiven Anforderungen deckt. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, daß die projektive Geometrie den Gedanken, daß Parallelen sich schneiden, und zwar in zwei Punkten, schon seit Desargues implizite vertreten hat und daher als die wahre Erfinderin des „Riemannschen“ Axioms angesprochen werden muß. Trotzdem die Polargeometrie also im Prinzip „schon längst dagewesen“ ist, ist doch das Wichtigste an ihr, nämlich ihre Objektivität, niemals behauptet und bewiesen worden. Auch hat sich noch kein Elementargeometer die Mühe gemacht, die Geometrie nach dem Riemannschen Grundsatz bis in das Kapitel von den Kegelschnitten oder bis zur Definition des Unendlichkeitsbegriffes wirklich auszudenken. Diese Arbeit fördert viel Neues zutage.

§ 10. Die Definitionen der Geometrie im Verhältnis zur Erfahrung.

Wenn man an der Welt von allem abstrahiert, außer von Gestalt und Maß, so bleibt eine geometrische Idee zurück. Diese Idee hat objektive Existenz, obwohl sie durch Abstraktion gebildet worden ist. Die geometrische Idee ist also ein Gegenstand der Erfahrung. Die Definition der Idee durch Einfühlung in dieselbe verändert an der Idee nichts, sondern übersetzt die Idee bloß in die Sprache der Worte. Die Geometrie ist somit das in Worte gefaßte logische System von den objektiven Gesetzen der geometrischen Ideen. Die Geometrie ist also nicht, wie Poincaré paradoxerweise behaupten zu müssen glaubt, ungewisser als eine Erfahrungswissenschaft. Sie ist objektiv eindeutig und denknotwendig.

§ 11. Die dreizehn Definitionen der Polargeometrie.

I. Das **Ungekrümmte** oder Gerade ist der kontinuierliche Übergangswert zwischen dem Konkaven und dem Konvexen.

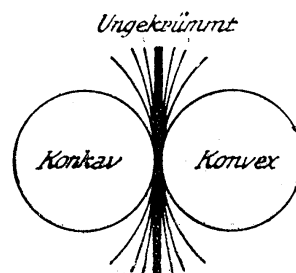


Fig. 1.

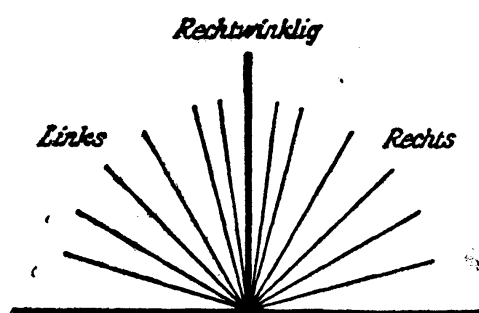


Fig. 2.

II. Das **Rechtwinklige** oder Senkrechte ist der ungekrümmte kontinuierliche Übergangswert zwischen dem Rechts und dem Links.

III. Eine **Dimension** ist ein durch die Begriffe I und II erzeugter Ordnungsbereich endlos vieler gleichartiger geometrischen Größen.

IV. Ein **Punkt** ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee nulldimensional ist.

V. Eine **Linie** ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee eindimensional ist.

VI. Eine **Fläche** ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee zweidimensional ist.

VII. Ein **Raum** ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee dreidimensional ist.

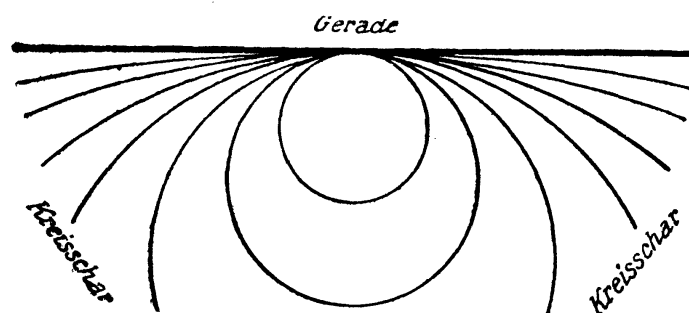


Fig. 3.

VIII. Eine **Gerade** ist eine in ihrer ganzen Ausdehnung ungekrümmte Linie.

IX. Eine **Ebene** ist eine in ihrer ganzen Ausdehnung ungekrümmte Fläche.

X. **Parallel** heißen für einen gewissen Beobachtungsort solche Geraden oder Ebenen, die auf einer dritten Geraden, welche den Ort der Beobachtung festsetzt, senkrecht stehen.

XI. **Unendlich** im geometrischen Sinne nenne ich die durch den Begriff X objektiv bestimmte Maßkonstante¹⁾.

¹⁾ Vgl. Anmerkung zu S. 24.

XII. Strecke nenne ich den Teil einer Geraden, der von zwei verschiedenen Punkten dieser Geraden begrenzt wird. Ihr absolutes Maß ist ein bestimmter Bruchteil der Länge „unendlich“.

XIII. Winkel nenne ich den Teil einer Ebene, der von zwei verschiedenen Geraden dieser Ebene begrenzt wird. Sein absolutes Maß ist ein bestimmter Bruchteil des Halbkreiswinkels von 180 Grad.

Anmerkung zu Definition I. Man könnte vielleicht geneigt sein, zu bestreiten, daß es einen kontinuierlichen Übergangswert zwischen dem Konkaven und dem Konvexen überhaupt gibt. Auf diesen Einwand sei erwidert, daß das Prinzip der Kontinuität im wissenschaftlichen Denken nicht ohne zwingende Gründe aufgegeben werden darf. Es ist eines der wesentlichsten Kennzeichen wissenschaftlichen Denkens, daß es die Erscheinungen in kontinuierliche Funktionszusammenhänge zu bringen sucht.

Nur das noch völlig kindliche Denken wird zwischen gekrümmten und ungekrümmten Linien oder Flächen einen Wesensgegensatz annehmen. Der Sprachgebrauch allerdings und die gewöhnliche Anschauungspsychologie (vgl. Fig. 10) gehen von der Voraussetzung aus, daß gekrümmte und ungekrümmte Linien einander so fremd seien wie zwei Welten, die sich gar nicht in Beziehung setzen lassen. Die erste Regung des wissenschaftlichen Denkens überwindet eben diese populäre Meinung, indem sie erkennt, daß zwischen regelmäßig gekrümmten geometrischen Wirklichkeiten (Kreisen und Kugeln) und absolut ungekrümmten geometrischen Wirklichkeiten ein kontinuierlicher Funktionsübergang besteht, daß also das Ungekrümmte nur ein Spezialfall des ununterbrochenen Funktionsverlaufes der konkav-konvexen Allgemeinheit ist. Wellstein behauptet, man könne nicht wissen, was eine Gerade sei, da sie in der Natur nicht vorkomme, außer etwa an Kristallkanten. Darauf ist zu erwidern, daß der Unterschied von Gerade und Krumm einen Gegensatz im Bewußtsein darstellt, der nicht aus der Natur erworben wird, sondern auf Grund dessen wir die Natur als gerade oder krumm beurteilen. Die Begriffe „Gerade“ und „Krumm“ sind eindeutige Kategorien im Sinne Kants. Die gegebene Definition des Geraden hat auch keinen der bei Schur (Grundlagen der Geom. S. 3) erwähnten Nachteile.